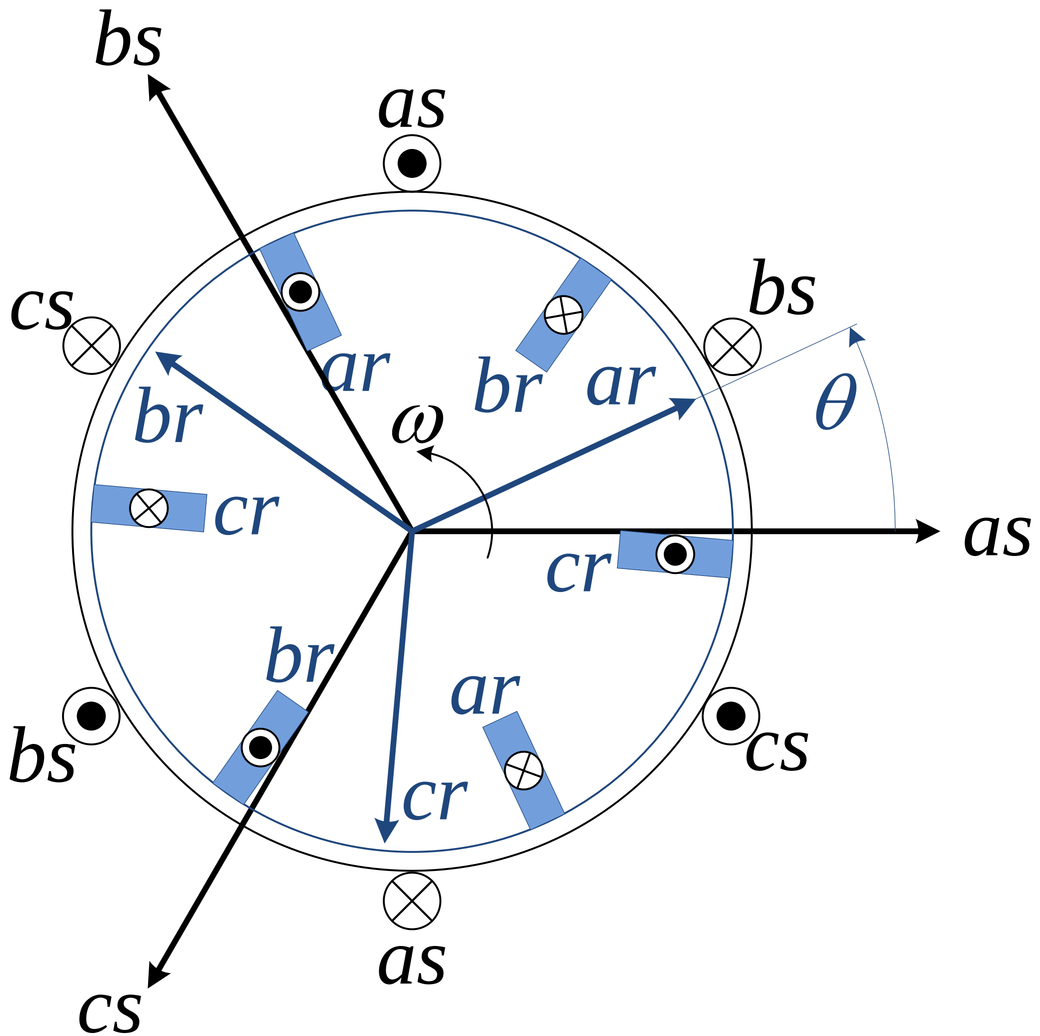
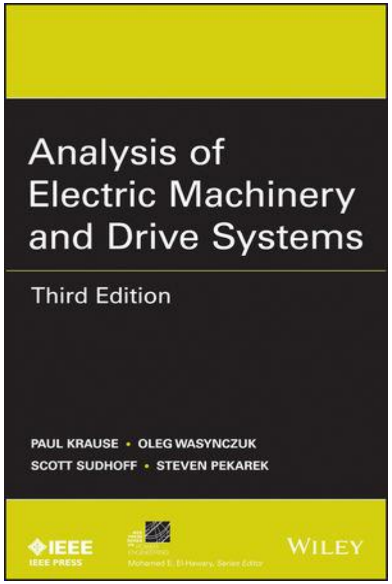
DINAMIČKI MODEL (SIMETRIČNOG) TROFAZNOG ASINHRONOG MOTORA





Paul C. Krause
Purdue University
School of Electrical and
Computer Engineering

Naponska jednačina:

$$\vec{u}_{abcs} = \mathbf{R}_s \cdot \vec{i}_{abcs} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\varphi}_{abcs}\right)$$

$$\vec{u}_{abcr} = \mathbf{R}_r \cdot \vec{i}_{abcr} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\varphi}_{abcr}\right)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{\varphi}_{abcs} \\ \vec{\varphi}_{abcr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ \left(\mathbf{L}_{sr}\right)^{\mathrm{T}} & \mathbf{L}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_{abcs} \\ \vec{i}_{abcr} \end{bmatrix}$$

U prethodnim jednačinama koristi se:

$$\vec{f}_{abc?} = \left[\, f_{a?} \quad f_{b?} \quad f_{c?} \,\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{R}_s = R_s \cdot \mathbf{I} \qquad\qquad \mathbf{R}_r = R_r \cdot \mathbf{I}$$

Matrice induktivnosti:

$$\mathbf{L}_s = \begin{bmatrix} \lambda_s + M_s & -0,5M_s & -0,5M_s \\ -0,5M_s & \lambda_s + M_s & -0,5M_s \\ -0,5M_s & -0,5M_s & \lambda_s + M_s \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_r = \begin{bmatrix} \lambda_r + M_r & -0,5M_r & -0,5M_r \\ -0,5M_r & \lambda_r + M_r & -0,5M_r \\ -0,5M_r & -0,5M_r & \lambda_r + M_r \end{bmatrix}$$

Ako uvedemo smenu:

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}$$

Matrica međusobne induktivnosti statora i rotora:

$$\mathbf{L}_{sr} = L_{sr} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta+\alpha) & \cos(\theta-\alpha) \\ \cos(\theta-\alpha) & \cos\theta & \cos(\theta+\alpha) \\ \cos(\theta+\alpha) & \cos(\theta-\alpha) & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Svođenje rotorskih veličina na stator

$$\vec{i}'_{abcr} = \left(N_r / N_s\right) \cdot \vec{i}_{abcr}$$

$$\vec{u}'_{abcr} = \left(N_s / N_r\right) \cdot \vec{u}_{abcr}$$

$$\vec{\varphi}'_{abcr} = \left(N_s / N_r\right) \cdot \vec{\varphi}_{abcr}$$

Na osnovu analogije sa magnetno spregnutim kolima

$$M_s = \left(N_s / N_r\right) L_{sr}$$

Može se napisati:

$$\mathbf{L}'_{sr} = \frac{N_s}{N_r} \cdot \mathbf{L}_{sr} = M_s \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta+\alpha) & \cos(\theta-\alpha) \\ \cos(\theta-\alpha) & \cos\theta & \cos(\theta+\alpha) \\ \cos(\theta+\alpha) & \cos(\theta-\alpha) & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Ponovo na osnovu analogije sa magnetno spregnutim kolima, može se napisati:

$$M_r = \left(N_r / N_s\right)^2 \cdot M_s$$

Ako se uzme:

$$\mathbf{L}_r' = \left(N_s / N_r\right)^2 \cdot \mathbf{L}_r$$

dobija se:

$$\mathbf{L}_r' = \begin{bmatrix} \lambda_r' + M_s & -0,5M_s & -0,5M_s \\ -0,5M_s & \lambda_r' + M_s & -0,5M_s \\ -0,5M_s & -0,5M_s & \lambda_r' + M_s \end{bmatrix}$$

gde je:

$$\lambda_r' = \left(N_s / N_r\right)^2 \cdot \lambda_r$$

Posle svođenja "rotora na stator" jednačine za fluks i naponske jednačina su:

$$\begin{bmatrix} \vec{\varphi}_{abcs} \\ \vec{\varphi}'_{abcr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}'_{sr} \\ \left(\mathbf{L}'_{sr}\right)^{\mathrm{T}} & \mathbf{L}'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_{abcs} \\ \vec{i}'_{abcr} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{u}_{abcs} \\ \vec{u}'_{abcr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s + p\mathbf{L}_s & p\mathbf{L}'_{sr} \\ p\left(\mathbf{L}'_{sr}\right)^{\mathrm{T}} & \mathbf{R}'_r + p\mathbf{L}'_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_{abcs} \\ \vec{i}'_{abcr} \end{bmatrix}$$

Pri čemu važi relacija:

$$\mathbf{R}'_r = \left(N_s / N_r\right)^2 \cdot \mathbf{R}_r$$

$$p = \frac{\partial}{\partial t}$$ - *operator diferenciranja*

JEDNAČINA MOMENTA

Na osnovu relacija koje važe za elektro-mehaničku konverziju energije može se napisati izraz za električnu energiju koja se pretvara u mehaničku:

$$W_e = \frac{1}{2}\left(\vec{i}_{abcs}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{L}_s - \lambda_s \cdot \mathbf{I}\right)\cdot \vec{i}_{abcs} + \left(\vec{i}_{abcs}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{L}'_{sr} \cdot \vec{i}'_{abcr} + \frac{1}{2}\left(\vec{i}'_{abcr}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{L}'_r - \lambda'_r \cdot \mathbf{I}\right)\cdot \vec{i}'_{abcr}$$

Mehanička snaga motora može se izraziti preko elektromagnetnog momenta i brzine obrtanja:

$$\frac{\partial}{\partial t} W_e = m_e \cdot \frac{\partial}{\partial t}\theta_m$$

θ_m - stvarni mehanički položaj rotora.

$$\theta = P \cdot \theta_m$$

θ - položaj rotora izražen u el.rad/s.

$$\frac{\partial}{\partial t} W_e = m_e \cdot \frac{1}{P} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\theta$$

Elektromagnetni moment motora je:

$$m_e = P \cdot \frac{\partial W_e}{\partial \theta} = P \cdot \left(\vec{i}_{abcs}\right)^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}\left[\mathbf{L}'_{sr}\right] \cdot \vec{i}'_{abcr}$$

$$m_e = -P \cdot M_s \cdot \begin{Bmatrix} \left[i_{as} \cdot \left(i'_{ar} - \frac{1}{2} i'_{br} - \frac{1}{2} i'_{cr} \right) + i_{bs} \cdot \left(-\frac{1}{2} i'_{ar} + i'_{br} - \frac{1}{2} i'_{cr} \right) + i_{cs} \cdot \left(-\frac{1}{2} i'_{ar} - \frac{1}{2} i'_{br} + i'_{cr} \right) \right] \cdot \sin\theta + \\ + \frac{\sqrt{3}}{2} \left[i_{as} \cdot \left(i'_{br} - i'_{cr} \right) + i_{bs} \cdot \left(i'_{cr} - i'_{ar} \right) + i_{cs} \cdot \left(i'_{ar} - i'_{br} \right) \right] \cdot \cos\theta \end{Bmatrix}$$

Dobijeni izraz je veoma komplikovan i praktično neupotrebljiv.

TRASFORMACIJA KOORDINATA

- U cilju uprošćenja analize uvodi se novi *REFERENTNI q-d-*0 *-sistem* koji može imati proizvoljnu brzinu. Prelazak iz realnog *abc* - sistema u *qd*0 - sistem vrši se pomoću matrice transformacije ***K****.*
- Izborom brzine referentnog sistema postižu se jednostavnije analize prelaznih procesa.

Izbor referentnog sistema

- **Stacionarni referentni sistem** obezbeđuje rasprezanje namotaja mašine, čime se pojednostavljuje matrica induktivnosti.

  $$\omega_{rs} = 0$$

  α-β

- **Sinhrono rotirajući referentni sistem** pored rasprezanja koordinata, oslobađa matricu induktivnosti zavisnosti od ugla rotora, odnosno vremena

  $$\omega_{rs} = \omega_s$$

  d-q

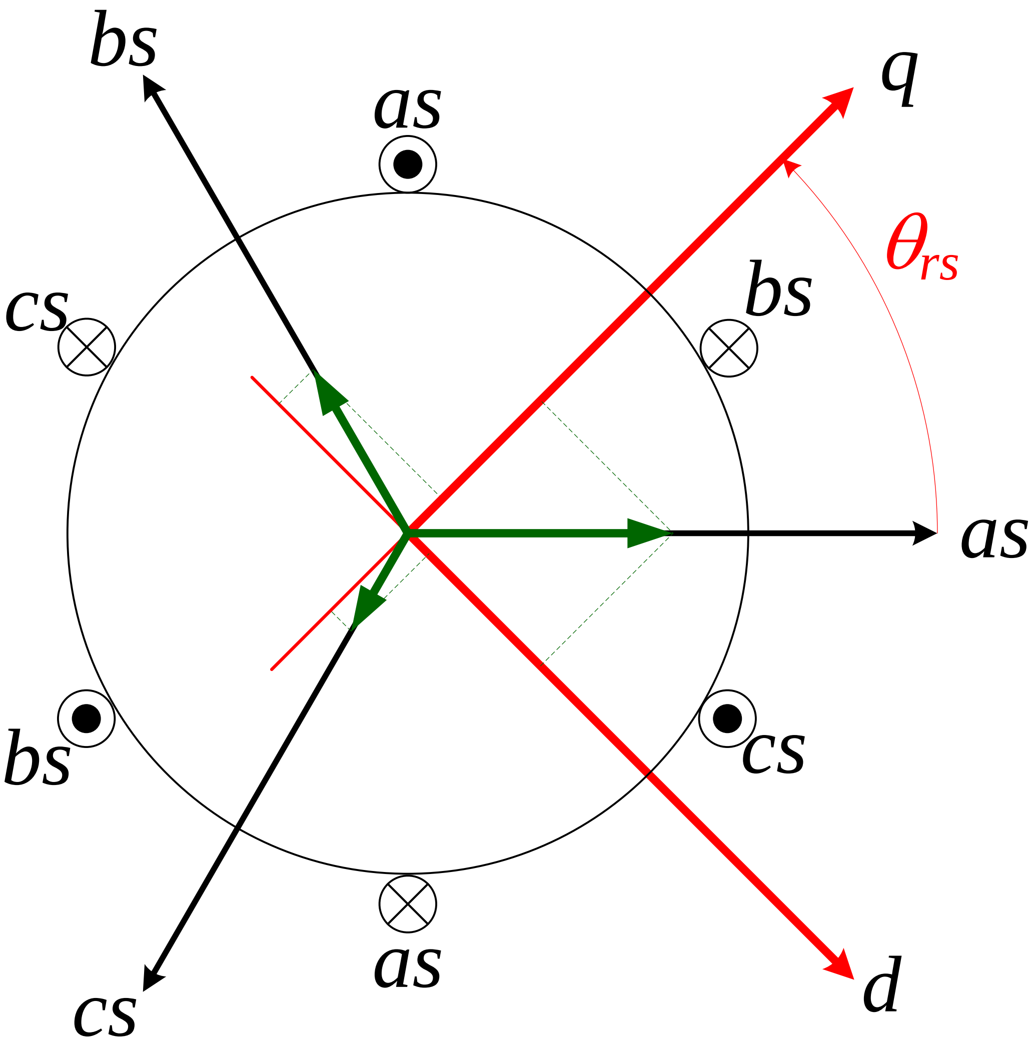
- **Referentni sistem vezan za rotor** pruža pogodnosti analize mašina sa dvostranim napajanjem.

  $$\omega_{rs} = \omega$$

  d-q

U slučaju simetričnog sistema, nulta komponenta je nula, u svim referentnim sistemima.

Transformacije statorskih veličina



$$\vec{f}_{qd0s} = \mathbf{K}_s \cdot \vec{f}_{abcs}$$

$$\vec{f}_{abcs} = \begin{bmatrix} f_{as} & f_{bs} & f_{cs} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\vec{f}_{qd0s} = \begin{bmatrix} f_{qs} & f_{ds} & f_{0s} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Matrice transformacije

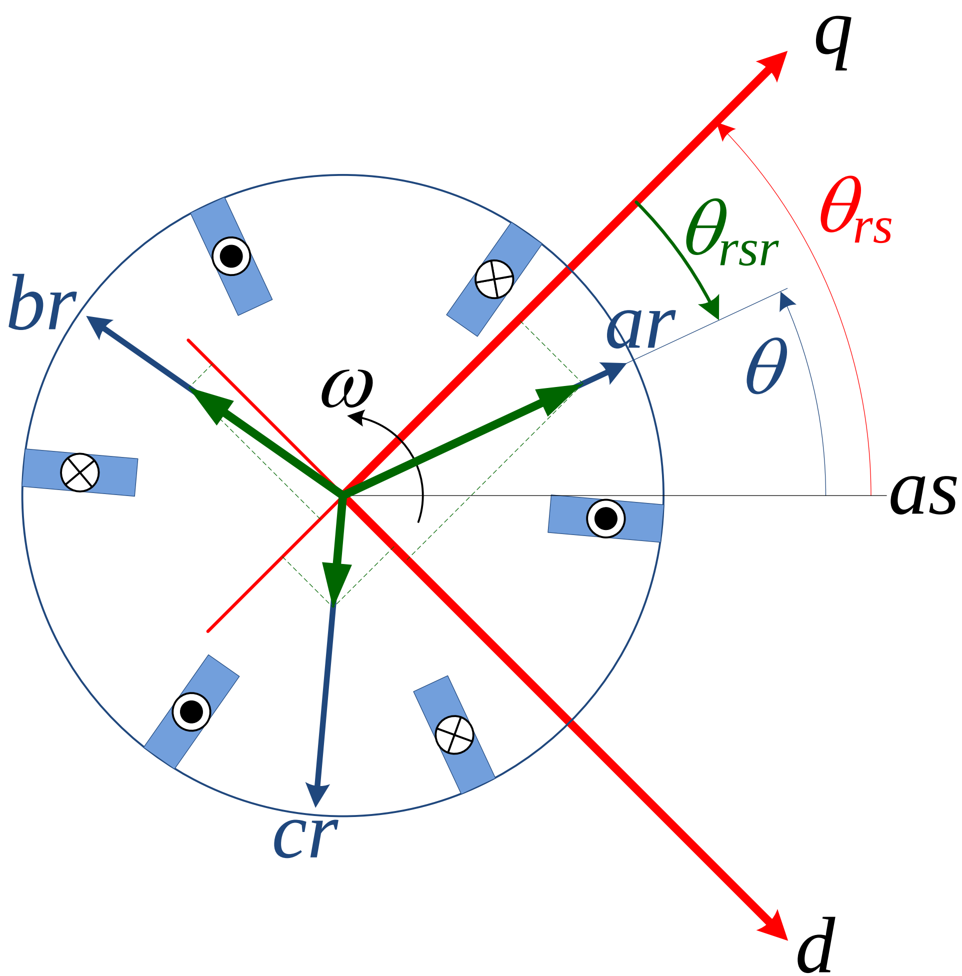
$$\mathbf{K}_s = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} \cos\theta_{rs} & \cos\left(\theta_{rs}-\alpha\right) & \cos\left(\theta_{rs}+\alpha\right) \\ \sin\theta_{rs} & \sin\left(\theta_{rs}-\alpha\right) & \sin\left(\theta_{rs}+\alpha\right) \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_s^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{rs} & \sin\theta_{rs} & 1 \\ \cos\left(\theta_{rs}-\alpha\right) & \sin\left(\theta_{rs}-\alpha\right) & 1 \\ \cos\left(\theta_{rs}+\alpha\right) & \sin\left(\theta_{rs}+\alpha\right) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\theta_{rs}(t) = \int_0^t \omega_{rs}\left(\xi\right) d\xi + \theta_{rs}(0)$$

Koeficijent transformacije 2/3 obezbeđuje invarijantnost po impedansi.

Transformacije rotorskih veličina



Trenutni položaj rotora u odnosu na referentni sistem.

$$\theta_{rsr} = \theta_{rs} - \theta$$

$$\vec{f}'_{qd0r} = \boldsymbol{K_r}\,\vec{f}'_{abcr}$$

$$\vec{f}'_{abcr} = \begin{bmatrix} f'_{ar} & f'_{br} & f'_{cr} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\vec{f}'_{qd0r} = \begin{bmatrix} f'_{qr} & f'_{dr} & f'_{0r} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Matrice transformacije

$$\mathbf{K}_r = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_{rsr} & \cos\left(\theta_{rsr} - \alpha\right) & \cos\left(\theta_{rsr} + \alpha\right) \\ \sin\theta_{rsr} & \sin\left(\theta_{rsr} - \alpha\right) & \sin\left(\theta_{rsr} + \alpha\right) \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_r^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{rsr} & \sin\theta_{rsr} & 1 \\ \cos\left(\theta_{rsr} - \alpha\right) & \sin\left(\theta_{rsr} - \alpha\right) & 1 \\ \cos\left(\theta_{rsr} + \alpha\right) & \sin\left(\theta_{rsr} + \alpha\right) & 1 \end{bmatrix}$$

$$\theta_{rs}(t) = \int_0^t \omega_{rs}\left(\xi\right) d\xi + \theta_{rs}(0) \qquad \theta(t) = \int_0^t \omega\left(\xi\right) d\xi + \theta(0)$$

Korišćene oznake

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}$$

θ_{rs} - trenutni položaj referentnog sistema,

θ - trenutni položaj rotora motora,

ω_{rs} - brzina referentnog sistema,

ω - brzina motora,

ω_s - sinhrona brzina.

Stacionarni koordinatni sistem

Kada je $\omega_{rs}=0,\ \theta_{rs}(0)=0 \quad \mathrm{i} \quad \alpha=\dfrac{2\pi}{3},$

$$\theta_{rs}=\int_0^t 0\cdot d\xi+\theta_{rs}(0)=0,$$

$$\mathbf{K}_s=\frac{2}{3}\cdot\begin{bmatrix}\cos 0 & \cos\left(0-\dfrac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(0+\dfrac{2\pi}{3}\right)\\ \sin 0 & \sin\left(0-\dfrac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(0+\dfrac{2\pi}{3}\right)\\ 0,5 & 0,5 & 0,5\end{bmatrix}$$

Edith Clarke
1883 - 1959

Stacionarni koordinatni sistem
Matrice transformacije statorskih veličina

$$\mathbf{K}_s = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -0,5 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_s^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -0,5 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -0,5 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Stacionarni koordinatni sistem
Matrice transformacije rotorskih veličina

$$\mathbf{K}_r = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \cos(-\theta-\alpha) & \cos(-\theta+\alpha) \\ \sin(-\theta) & \sin(-\theta-\alpha) & \sin(-\theta+\alpha) \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_r^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) & 1 \\ \cos(-\theta-\alpha) & \sin(-\theta-\alpha) & 1 \\ \cos(-\theta+\alpha) & \sin(-\theta+\alpha) & 1 \end{bmatrix}$$

Šta se postiže ovom transformacijom? Statorske veličine

Primer simetričnog trofaznog sistema koji ima konstantnu učestanost:

$$f_{as} = f_{\max s} \cdot \cos\left(\omega_s \cdot t + \theta_s(0)\right)$$

$$f_{bs} = f_{\max s} \cdot \cos\left(\omega_s \cdot t - \alpha + \theta_s(0)\right)$$

$$f_{cs} = f_{\max s} \cdot \cos\left(\omega_s \cdot t + \alpha + \theta_s(0)\right)$$

posle transformacije se dobija:

$$f_{qs} = f_{\max s} \cdot \cos\left(\omega_s \cdot t + \theta_s(0)\right)$$

$$f_{ds} = -f_{\max s} \cdot \sin\left(\omega_s \cdot t + \theta_s(0)\right)$$

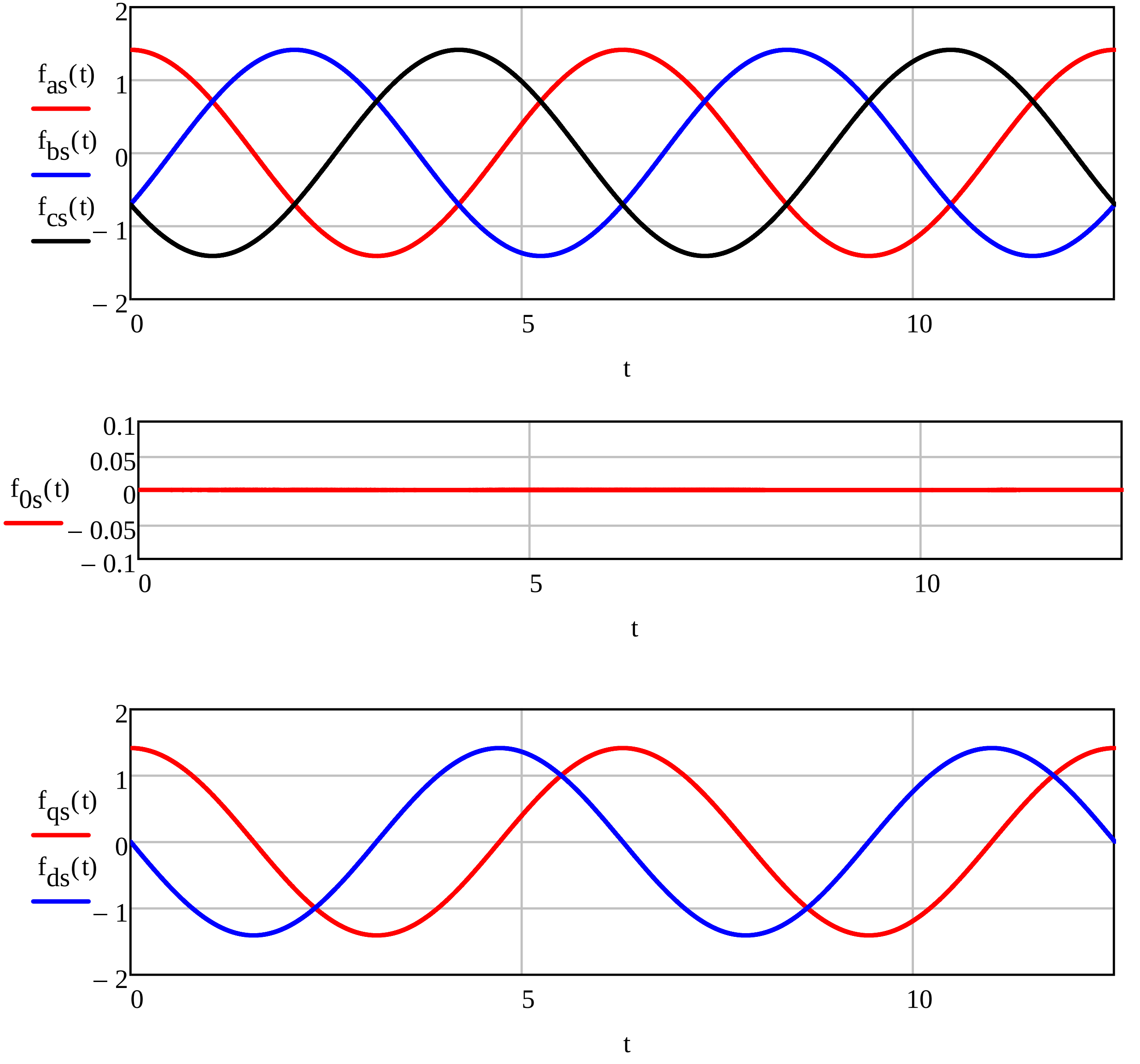
$$f_{0s} = 0 = \text{const.}$$

$$f_{\max s} = \sqrt{f_{qs}^2 + f_{ds}^2}$$

Umesto trofaznog naizmeničnog sistema dobijamo dvofazni sistem.

Statorske veličine $\omega_{rs}=0$

Na graficima
$\omega_s=1$



Šta se postiže ovom transformacijom? Rotorske veličine

Kada je ω_{rs}=0, $\theta_{rs}(0) = 0$ i $\theta_{rsr} = 0 - \theta = -\theta$ za simetričan rotorski sistem:

$$f'_{ar} = f'_{\max r} \cdot \cos\left[\left(\omega_s - \omega\right)\cdot t + \theta_r\left(0\right)\right]$$

$$f'_{br} = f'_{\max r} \cdot \cos\left[\left(\omega_s - \omega\right)\cdot t + \theta_r\left(0\right) - \alpha\right]$$

$$f'_{cr} = f'_{\max r} \cdot \cos\left[\left(\omega_s - \omega\right)\cdot t + \theta_r\left(0\right) + \alpha\right]$$

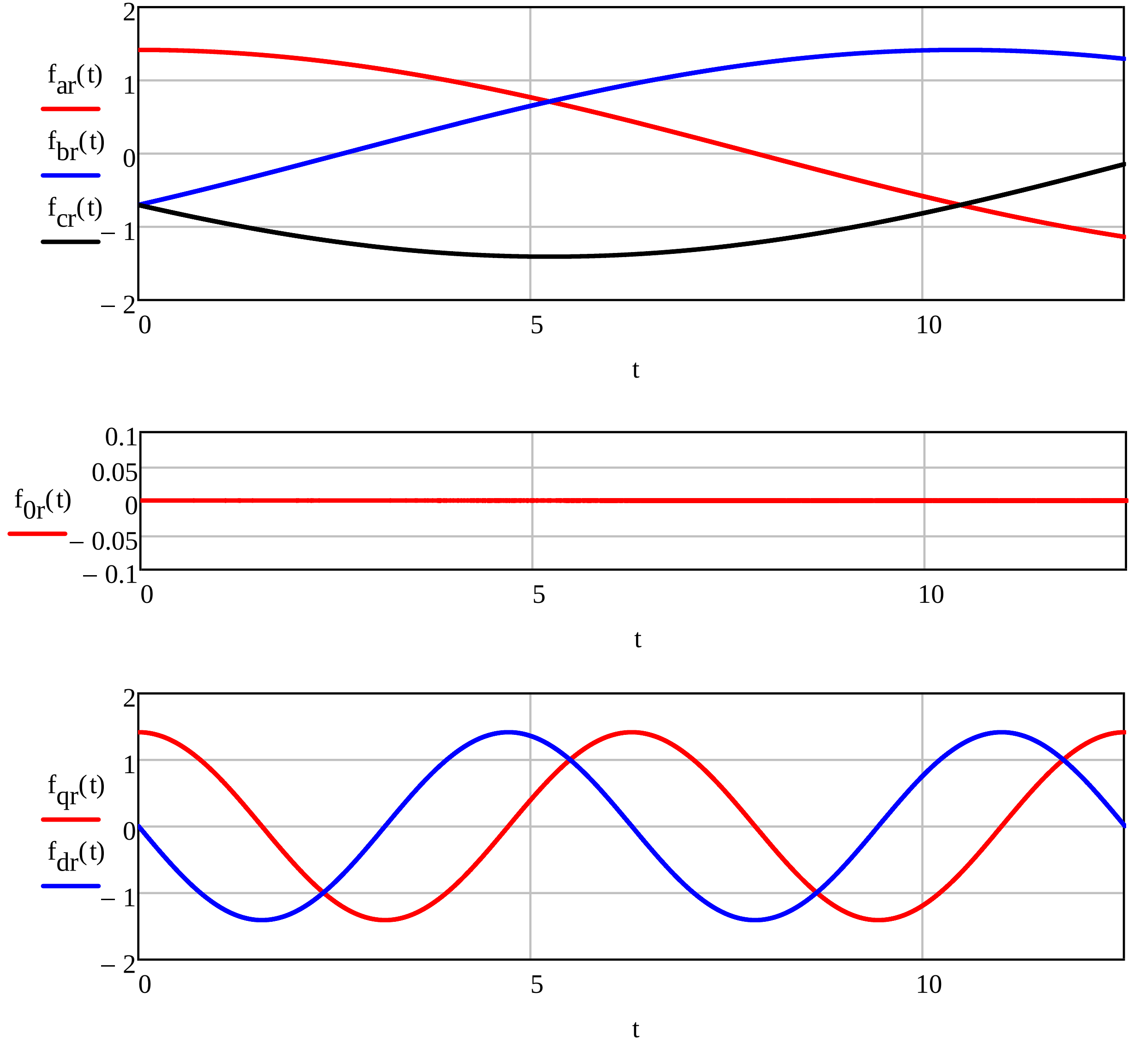
posle transformacije dobija se:

$$f'_{qr} = f'_{\max r} \cdot \cos\left(\omega_s \cdot t + \theta_r\left(0\right)\right)$$

$$f'_{dr} = -f'_{\max r} \cdot \sin\left(\omega_s \cdot t + \theta_r\left(0\right)\right)$$

$$f'_{0r} = 0$$

Rotorske veličine $\omega_{rs}=0$

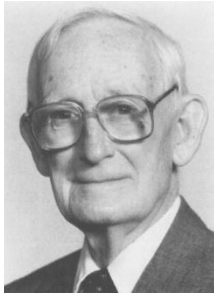


Sinhrono rotirajući koordinatni sistem

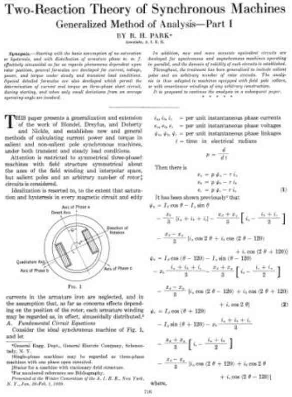
Kada je $\omega_{rs} = \omega_s,\ \theta_{rs}(0) = 0,\ \theta_s(0) = 0$ i $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$,

$$\theta_{rs} = \theta_s = \int_0^t \omega_s(\xi)\cdot d\xi + \theta_s(0)$$

$$\mathbf{K}_s = \frac{2}{3}\cdot\begin{bmatrix} \cos\theta_s & \cos\left(\theta_s - \dfrac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta_s + \dfrac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\theta_s & \sin\left(\theta_s - \dfrac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\theta_s + \dfrac{2\pi}{3}\right) \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$



Robert H. Park
1902-1994


Two-Reaction Theory of Synchronous Machines
Generalized Method of Analysis—Part I
BY R. H. PARK

Sinhrono rotirajući koordinatni sistem
Matrice transformacije statorskih veličina

$$\mathbf{K}_s = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} \cos\theta_s & \cos(\theta_s - \alpha) & \cos(\theta_s + \alpha) \\ \sin\theta_s & \sin(\theta_s - \alpha) & \sin(\theta_s + \alpha) \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_s^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_s & \sin\theta_s & 1 \\ \cos(\theta_s - \alpha) & \sin(\theta_s - \alpha) & 1 \\ \cos(\theta_s + \alpha) & \sin(\theta_s + \alpha) & 1 \end{bmatrix}$$

Sinhrono rotirajući koordinatni sistem
Matrice transformacije rotorskih veličina

$$\mathbf{K}_r = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta_s - \theta) & \cos(\theta_s - \theta - \alpha) & \cos(\theta_s - \theta + \alpha) \\ \sin(\theta_s - \theta) & \sin(\theta_s - \theta - \alpha) & \sin(\theta_s - \theta + \alpha) \\ 0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_r^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_s - \theta) & \sin(\theta_s - \theta) & 1 \\ \cos(\theta_s - \theta - \alpha) & \sin(\theta_s - \theta - \alpha) & 1 \\ \cos(\theta_s - \theta + \alpha) & \sin(\theta_s - \theta + \alpha) & 1 \end{bmatrix}$$

Šta se postiže ovom transformacijom? Statorske veličine

Primer simetričnog trofaznog sistema koji ima konstantnu učestanost:

$$f_{as} = f_{\max s} \cdot \cos\left(\omega_s \cdot t + \theta_s(0)\right)$$

$$f_{bs} = f_{\max s} \cdot \cos\left(\omega_s \cdot t - \alpha + \theta_s(0)\right)$$

$$f_{cs} = f_{\max s} \cdot \cos\left(\omega_s \cdot t + \alpha + \theta_s(0)\right)$$

posle transformacije se dobija:

$$f_{qs} = f_{\max s} \cdot \cos\left(\theta_s(0)\right)$$

$$f_{ds} = -f_{\max s} \cdot \sin\left(\theta_s(0)\right)$$

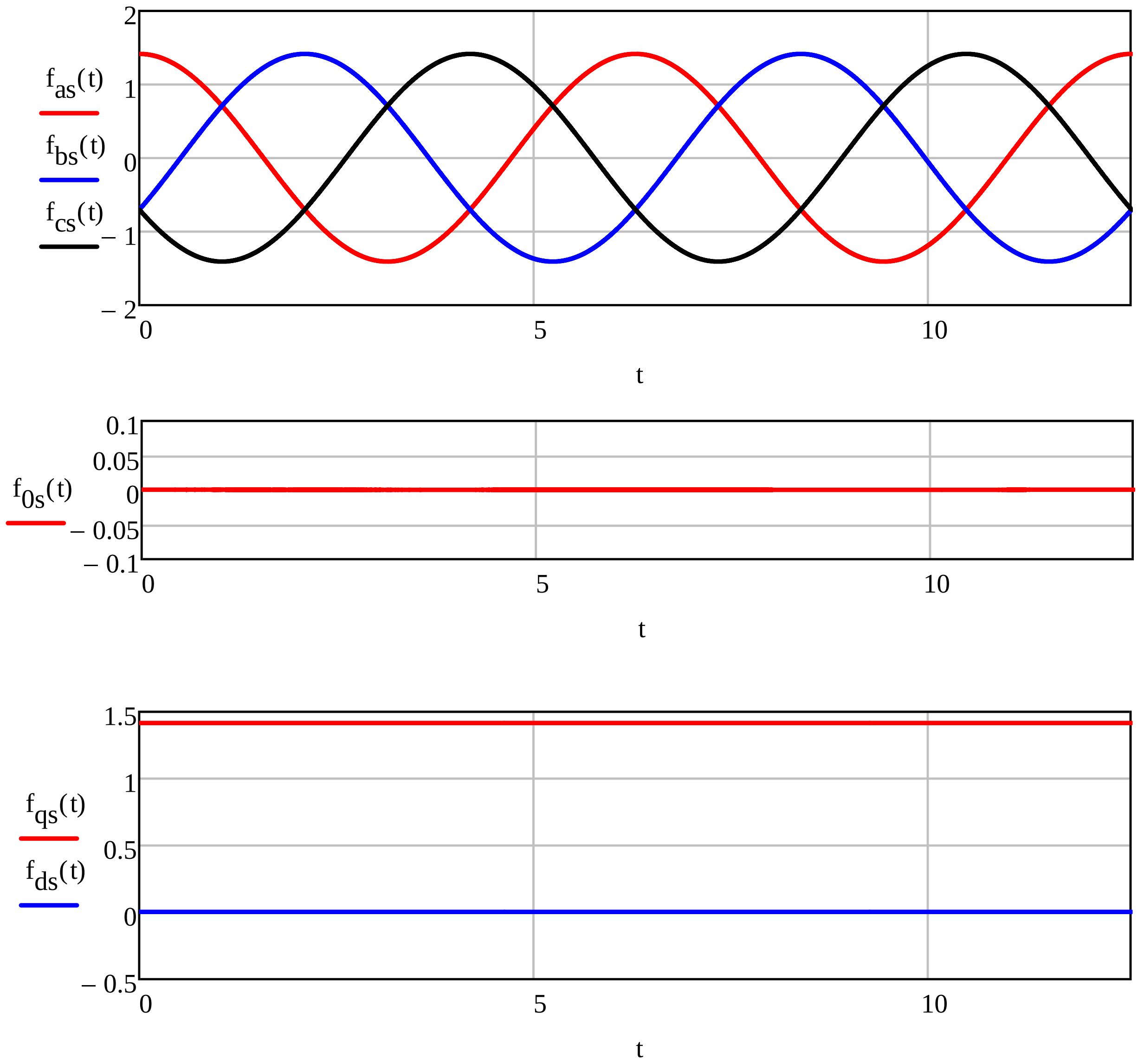
$$f_{0s} = 0 = \text{const.}$$

$$f_{\max s} = \sqrt{f_{qs}^2 + f_{ds}^2}$$

Umesto trofaznog naizmeničnog sistema dobijamo dvofazni sistem. Transformisane veličine se ne menjaju u vremenu.

Statorske veličine $\omega_{rs} = \omega_s$

Na graficima
$\omega_s = 1$



Šta se postiže ovom transformacijom? Rotorske veličine

Kada je $\omega_{rs}=\omega_s$ =const, $\theta_s\,(0) = 0$ i $\theta_{rsr} = \theta_r = \theta_s - \theta$,
za simetričan rotorski sistem:

$$f'_{ar} = f'_{\max r} \cdot \cos\left[\left(\omega_s - \omega\right)\cdot t + \theta_r\left(0\right)\right]$$

$$f'_{br} = f'_{\max r} \cdot \cos\left[\left(\omega_s - \omega\right)\cdot t + \theta_r\left(0\right) - \alpha\right]$$

$$f'_{cr} = f'_{\max r} \cdot \cos\left[\left(\omega_s - \omega\right)\cdot t + \theta_r\left(0\right) + \alpha\right]$$

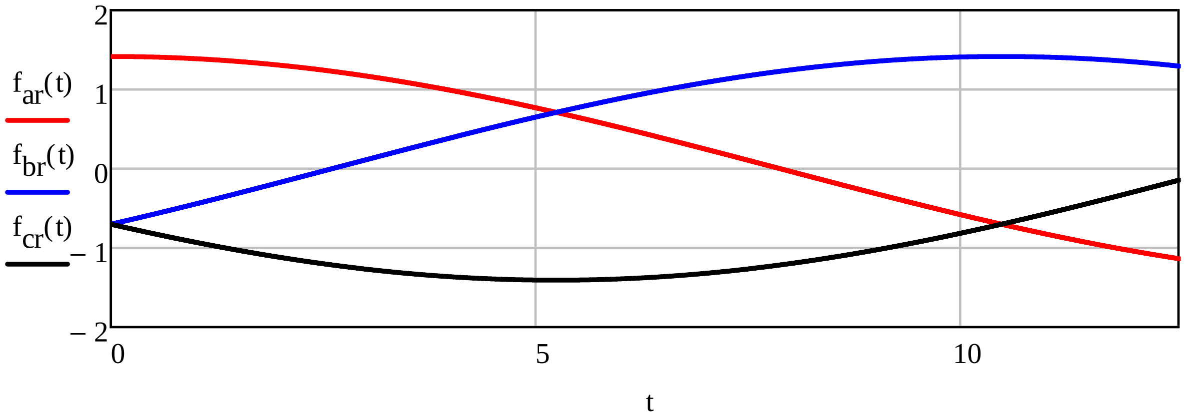
posle transformacije dobija se:

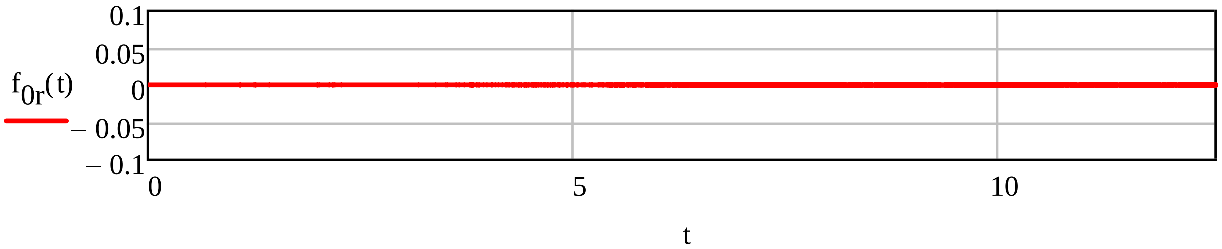
$$f'_{qr} = f'_{\max r} \cdot \cos\theta_r\left(0\right)$$

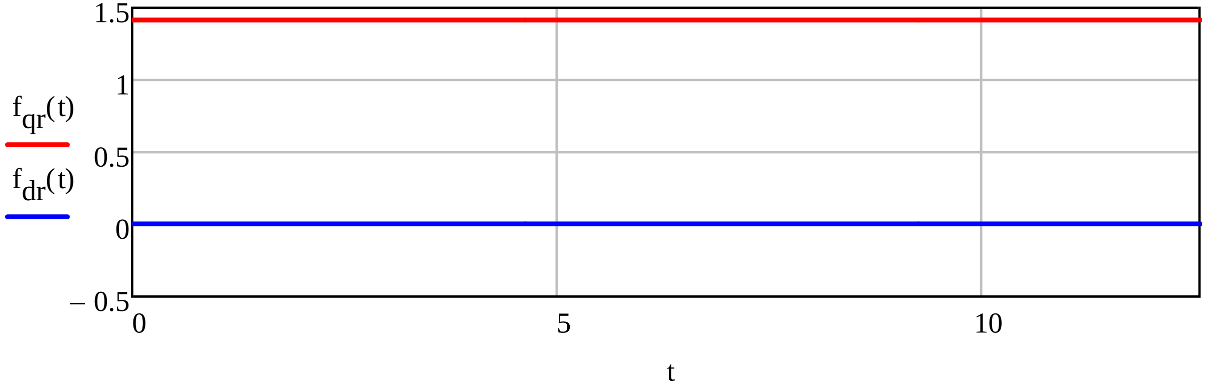
$$f'_{dr} = -f'_{\max r} \cdot \sin\theta_r\left(0\right)$$

$$f'_{0r} = 0$$

Rotorske veličine $\omega_{rs} = \omega_s$







TRANSFORMACIJE NAPONSKIH JEDNAČINA ASINHRONOG MOTORA

Prvi karakterističan slučaj: $\vec{u}_{abc} = \mathbf{R} \cdot \vec{i}_{abc}$

Množeći ovu jednačinu sa desne strane sa $\mathbf{K}$ dobija se:

$$\vec{u}_{qd0} = \mathbf{K} \cdot \vec{u}_{abc} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{R} \cdot \vec{i}_{abc} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{R} \cdot \left(\mathbf{K}\right)^{-1} \cdot \vec{i}_{qd0}$$

Kod simetričnih sistema je:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{R} \cdot \left(\mathbf{K}\right)^{-1} = R \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{I} \cdot \left(\mathbf{K}\right)^{-1} = R \cdot \mathbf{I} = \mathbf{R}$$

Prema tome dobija se: $\vec{u}_{qd0} = \mathbf{R} \cdot \vec{i}_{qd0}$

Drugi karakterističan slučaj: $\vec{u}_{abc} = \frac{d}{dt}\vec{\varphi}_{abc}$

Posle množenja sa $\mathbf{K}$ dobija se:

$$\vec{u}_{qd0} = \mathbf{K}\cdot\vec{u}_{abc} = \mathbf{K}\cdot\frac{d}{dt}\left[\left(\mathbf{K}\right)^{-1}\cdot\vec{\varphi}_{qd0}\right] =$$

$$= \mathbf{K}\cdot\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{K}\right)^{-1}\cdot\vec{\varphi}_{qd0} + \mathbf{K}\cdot\left(\mathbf{K}\right)^{-1}\cdot\frac{d}{dt}\vec{\varphi}_{qd0}$$

ako je $\theta_{rs} = \omega_{rs}\cdot t$, sledi:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\mathbf{K}\right)^{-1}\right] = \omega_{rs}\cdot\begin{bmatrix} -\sin\theta_{rs} & \cos\theta_{rs} & 0 \\ -\sin\left(\theta_{rs}-\alpha\right) & \cos\left(\theta_{rs}-\alpha\right) & 0 \\ -\sin\left(\theta_{rs}+\alpha\right) & \cos\left(\theta_{rs}+\alpha\right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}\cdot\frac{d}{dt}\left[\left(\mathbf{K}\right)^{-1}\right]=\omega_{rs}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\omega_{rs}\cdot\mathbf{W}$$

Konačno je:

$$\vec{u}_{qd0}=\omega_{rs}\cdot\begin{bmatrix}\varphi_d\\ -\varphi_q\\ 0\end{bmatrix}+\frac{d}{dt}\vec{\varphi}_{qd0}$$

Da bi bilo jasnije, prethodna jednačina se može razbiti na:

$$u_q=\omega_{rs}\cdot\varphi_d+\frac{d}{dt}\varphi_q$$

$$u_d=-\omega_{rs}\cdot\varphi_q+\frac{d}{dt}\varphi_d$$

$$u_0=\frac{d}{dt}\varphi_0$$

Izvedene relacije primenjene na naponske jednačine asinhronog motora:

$$\begin{bmatrix} \vec{u}_{qd0s} \\ \vec{u}'_{qd0r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}'_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{i}_{qd0s} \\ \vec{i}'_{qd0r} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{rs} \cdot \vec{\varphi}_{qd0s} \\ (\omega_{rs} - \omega) \cdot \vec{\varphi}'_{qd0r} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \vec{\varphi}_{qd0s} \\ \vec{\varphi}'_{qd0r} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{0}$ - kvadratna (3×3) nula matrica.

TRANSFORMACIJE JEDNAČINA FLUKSA ASINHRONOG MOTORA

$$\begin{bmatrix} \vec{\varphi}_{qd0s} \\ \vec{\varphi}'_{qd0r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s \cdot \mathbf{L}_s \cdot (\mathbf{K}_s)^{-1} & \mathbf{K}_s \cdot \mathbf{L}'_{sr} \cdot (\mathbf{K}_r)^{-1} \\ \mathbf{K}_r \cdot (\mathbf{L}'_{sr}) \cdot (\mathbf{K}_s)^{-1} & \mathbf{K}_r \cdot \mathbf{L}'_r \cdot (\mathbf{K}_r)^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{i}_{qd0s} \\ \vec{i}'_{qd0r} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_s \cdot \mathbf{L}_s \cdot (\mathbf{K}_s)^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_s + M & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_s + M & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_s + M \end{bmatrix}$$

$$M = \frac{3}{2} \cdot M_s$$

$$\mathbf{K}_r \cdot \mathbf{L}'_r \cdot \left(\mathbf{K}_r\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda'_r + M & 0 & 0 \\ 0 & \lambda'_r + M & 0 \\ 0 & 0 & \lambda'_r + M \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_s \cdot \mathbf{L}'_{sr} \cdot \left(\mathbf{K}_r\right)^{-1} = \mathbf{K}_r \cdot \mathbf{L}'_{sr} \cdot \left(\mathbf{K}_s\right)^{-1} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

U slučaju simetričnog sistema, nulta komponenta je nula u svim referentnim sistemima.

U tom slučaju naponska jednačina asinhronog motora je:

$$\begin{bmatrix} u_{qs} \\ u_{ds} \\ u'_{qr} \\ u'_{dr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R'_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R'_r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i'_{qr} \\ i'_{dr} \end{bmatrix} +$$

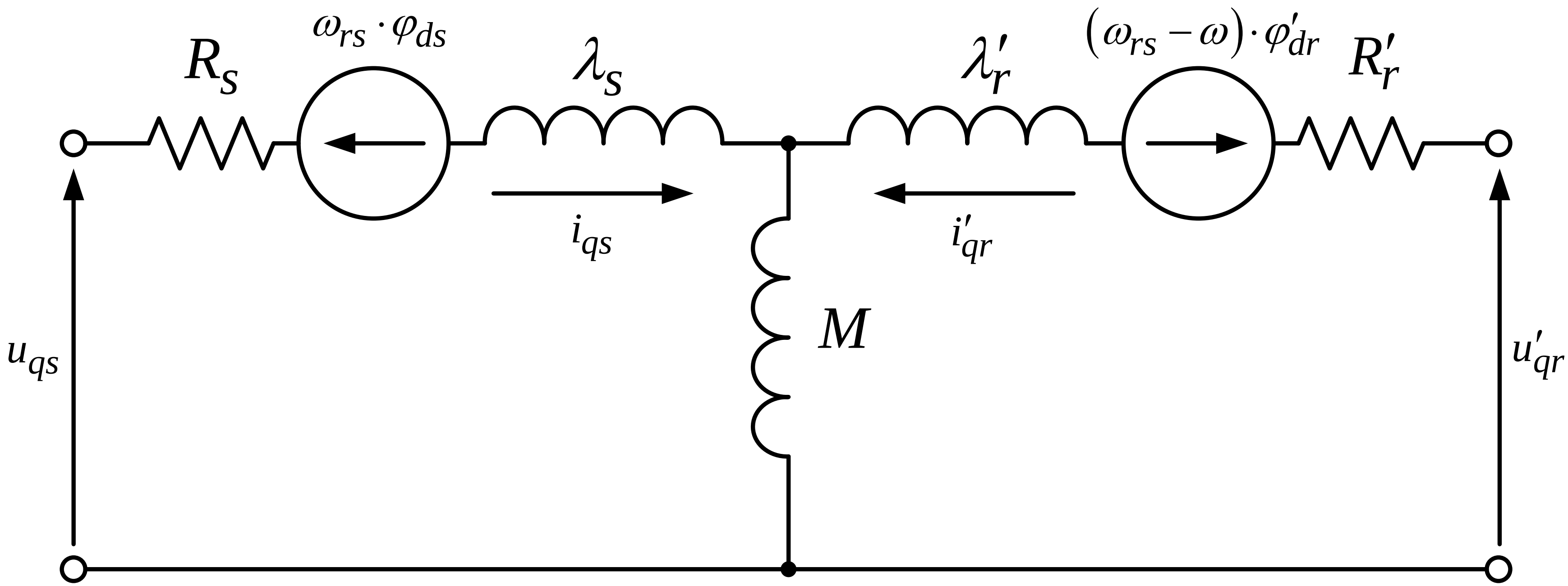
$$+ \begin{bmatrix} p & \omega_{rs} & 0 & 0 \\ -\omega_{rs} & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & (\omega_{rs} - \omega) \\ 0 & 0 & -(\omega_{rs} - \omega) & p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_{qs} \\ \varphi_{ds} \\ \varphi'_{qr} \\ \varphi'_{dr} \end{bmatrix}$$

$$p = \frac{d}{dt}$$

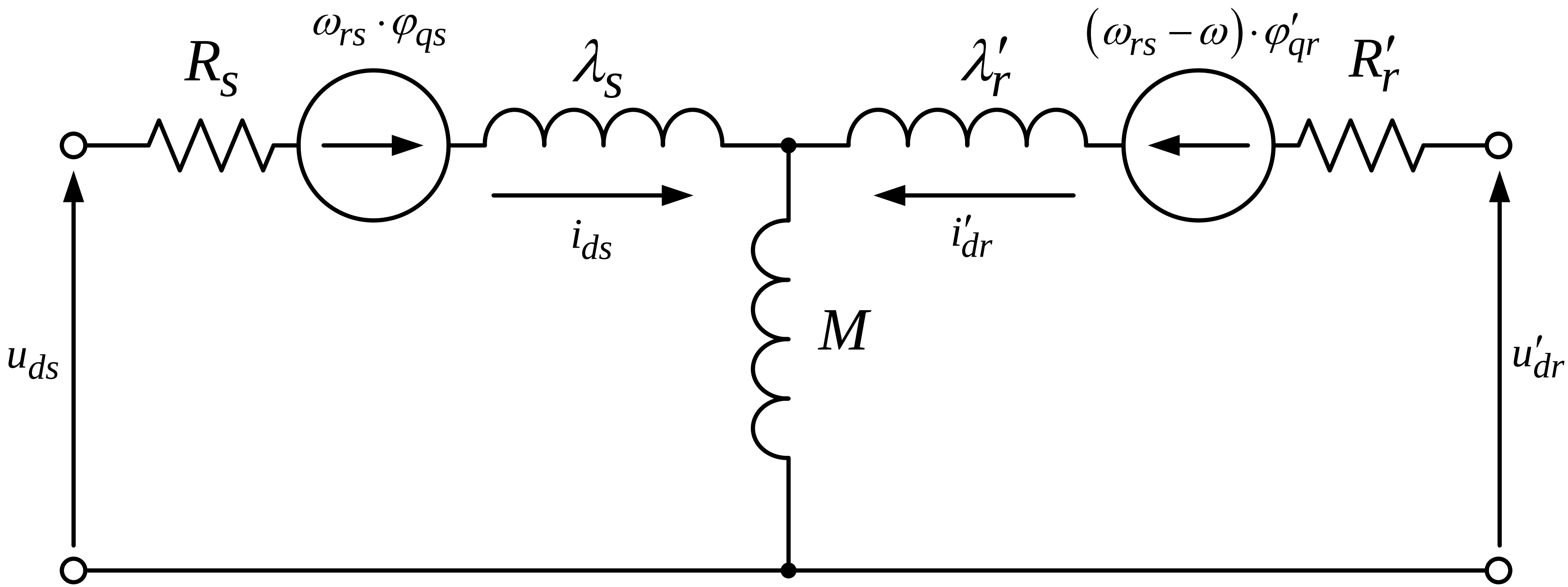
Veza između flukseva i struja je:

$$\begin{bmatrix} \varphi_{qs} \\ \varphi_{ds} \\ \varphi'_{qr} \\ \varphi'_{dr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_s + M & 0 & M & 0 \\ 0 & \lambda_s + M & 0 & M \\ M & 0 & \lambda'_r + M & 0 \\ 0 & M & 0 & \lambda'_r + M \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{qs} \\ i_{ds} \\ i'_{qr} \\ i'_{dr} \end{bmatrix}$$

Ekvivalentna šema asinhronog motora po *q* osi



Ekvivalentna šema asinhronog motora po *d* osi



Obratiti pažnju na smerove u generatorima “elektromotorne sile”.

JEDNAČINE MOMENTA

Ako se pođe od jednačine za moment (strana 8):

$$m_e = P \cdot \left[\left(\mathbf{K}_s \right)^{-1} \cdot \vec{i}_{qd0s} \right]^{\mathrm{T}} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\mathbf{L}'_{sr} \right] \cdot \left(\mathbf{K}_r \right)^{-1} \cdot \vec{i}'_{qd0r}$$

mogu se dobiti sledeći izrazi:

$$m_e = \frac{3P}{2} \cdot M \cdot \left(i_{qs} \cdot i'_{dr} - i_{ds} \cdot i'_{qr} \right)$$

$$m_e = \frac{3P}{2} \cdot \left(\varphi'_{qr} \cdot i'_{dr} - \varphi'_{dr} \cdot i'_{qr} \right)$$

$$m_e = \frac{3P}{2} \cdot \left(i_{qs} \cdot \varphi_{ds} - i_{ds} \cdot \varphi_{qs} \right)$$

$$m_e = \frac{3P}{2} \cdot \frac{M}{L_r} \left(i_{qs} \cdot \varphi'_{dr} - i_{ds} \cdot \varphi'_{qr} \right)$$

$$m_e = \frac{3P}{2} \cdot \frac{1}{\omega_b} \cdot \left(\psi'_{qr} \cdot i'_{dr} - \psi'_{dr} \cdot i'_{qr} \right)$$

itd.

$$\boxed{m_e = \frac{3P}{2} \cdot \left(\vec{i}_s \times \vec{\varphi}_s \right)}$$

Dinamički model kaveznog asinhronog motora

Sinhrono rotirajući referentni sistem

$$\omega_{rs} = \omega_s \qquad p = \frac{d}{dt}$$

$$u_{qs} = R_s \cdot i_{qs} + p\varphi_{qs} + \omega_{rs} \cdot \varphi_{ds} \qquad (1)$$

$$u_{ds} = R_s \cdot i_{ds} + p\varphi_{ds} - \omega_{rs} \cdot \varphi_{qs} \qquad (2)$$

$$0 = R_r' \cdot i_{qr}' + p\varphi_{qr}' + (\omega_{rs} - \omega) \cdot \varphi_{dr}' \qquad (3)$$

$$0 = R_r' \cdot i_{dr}' + p\varphi_{dr}' - (\omega_{rs} - \omega) \cdot \varphi_{qr}' \qquad (4)$$

$$\varphi_{qs} = L_s \cdot i_{qs} + M \cdot i_{qr}' \qquad (5) \qquad \Rightarrow L_s = M + \lambda_s$$

$$\varphi_{ds} = L_s \cdot i_{ds} + M \cdot i_{dr}' \qquad (6)$$

$$\varphi_{qr}' = L_r' \cdot i_{qr}' + M \cdot i_{qs} \qquad (7) \qquad \Rightarrow L_r' = M + \lambda_r'$$

$$\varphi_{dr}' = L_r' \cdot i_{dr}' + M \cdot i_{ds} \qquad (8)$$

$$m_e = \frac{3}{2} \cdot P \cdot \frac{M}{L_r'} \cdot (i_{qs} \cdot \varphi_{dr}' - i_{ds} \cdot \varphi_{qr}') \qquad (9)$$

Dinamički model kaveznog asinhronog motora

Stacionarni referentni sistem

$$\omega_{rs} = 0 \qquad p = \frac{d}{dt}$$

$$u_{qs} = R_s \cdot i_{qs} + p\varphi_{qs} + 0 \cdot \varphi_{ds} \qquad (1)$$

$$u_{ds} = R_s \cdot i_{ds} + p\varphi_{ds} - 0 \cdot \varphi_{qs} \qquad (2)$$

$$0 = R_r' \cdot i_{qr}' + p\varphi_{qr}' + (0 - \omega) \cdot \varphi_{dr}' \qquad (3)$$

$$0 = R_r' \cdot i_{dr}' + p\varphi_{dr}' - (0 - \omega) \cdot \varphi_{qr}' \qquad (4)$$

$$\varphi_{qs} = L_s \cdot i_{qs} + M \cdot i_{qr}' \qquad (5) \qquad \Rightarrow L_s = M + \lambda_s$$

$$\varphi_{ds} = L_s \cdot i_{ds} + M \cdot i_{dr}' \qquad (6)$$

$$\varphi_{qr}' = L_r' \cdot i_{qr}' + M \cdot i_{qs} \qquad (7) \qquad \Rightarrow L_r' = M + \lambda_r'$$

$$\varphi_{dr}' = L_r' \cdot i_{dr}' + M \cdot i_{ds} \qquad (8)$$

$$m_e = \frac{3}{2} \cdot P \cdot \frac{M}{L_r'} \cdot (i_{qs} \cdot \varphi_{dr}' - i_{ds} \cdot \varphi_{qr}') \qquad (9)$$

NORMALIZACIJA

Potrebno je na već poznate bazne vrednosti dodati:

$$U_{qdb} = U_{s\max\ fazno} = \sqrt{2} \cdot U_b$$

$$I_{qdb} = I_{s\max\ fazno} = \sqrt{2} \cdot I_b$$

$$P_b = (3/2) \cdot U_{qdb} \cdot I_{qdb}$$

$$\varphi_b = \frac{U_{qdb}}{\omega_b}$$

Može se uvesti i normalizacija vremena $\tau = \frac{t}{T_b} = \omega_b \cdot t$

Zbog toga se modifikuje operator diferenciranja $p' = \frac{\partial}{\partial(\omega_b \cdot t)} = \frac{\partial}{\partial \tau}$

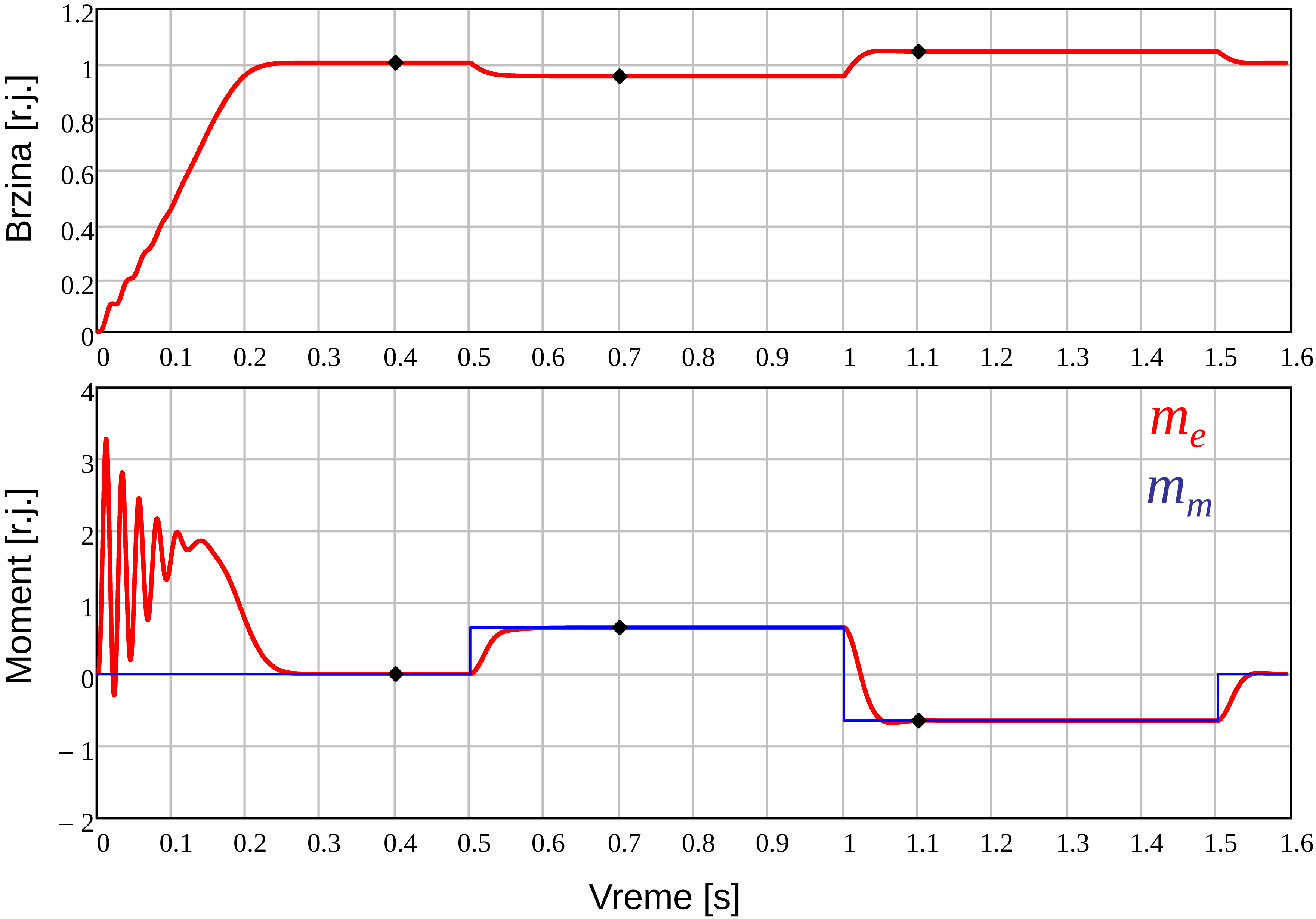
Sve ostalo je kao što je već pokazano.

Prelazni procesi

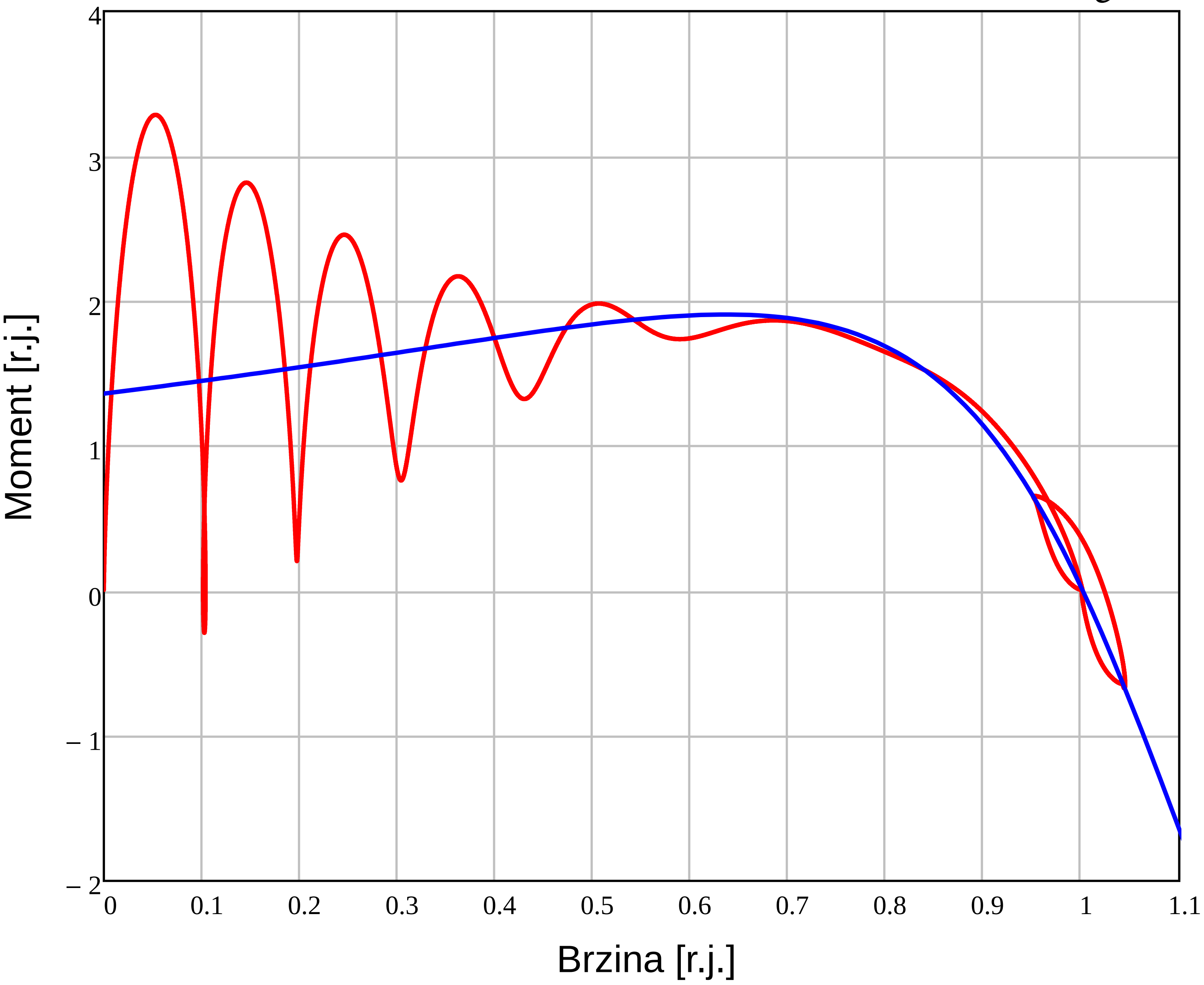
Start motora u praznom hodu, promene opterećenja

- Vremenski dijagrami momenta i brzine
- Vremenski dijagrami promene faznih struja statora i rotora
- Mehanička karakteristika $\left(m_e(\omega)\right)$
- Vremenski dijagram promene *qd*-komponenti statorskih i rotorskih struja i flukseva
- Dijagrami prostornih vektora statorske i rotorske struje, statorskog i rotorskog fluksa

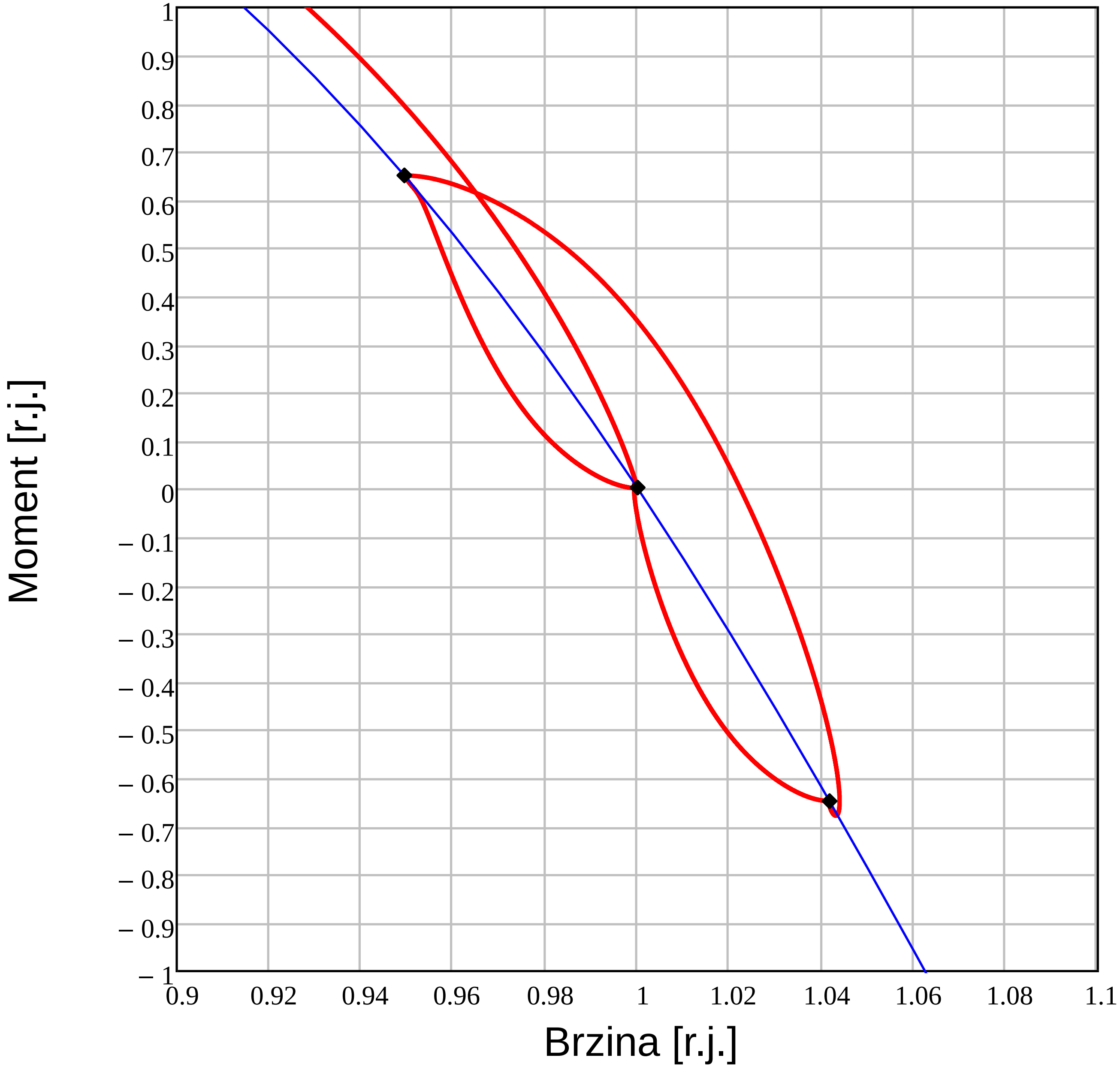
Vremenski dijagram brzine i momenta



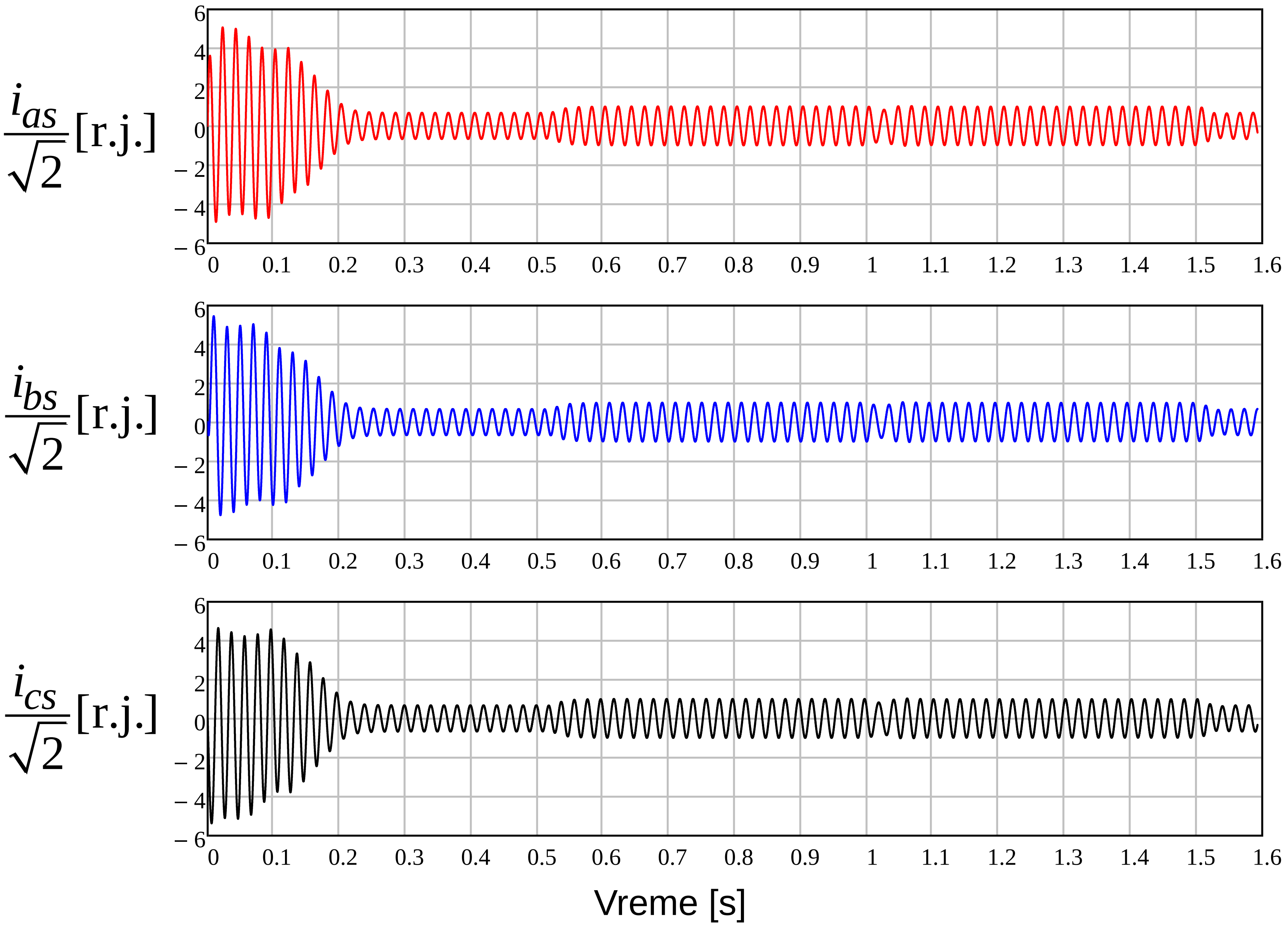
Statička karakteristika i dijagram $m_e(\omega)$



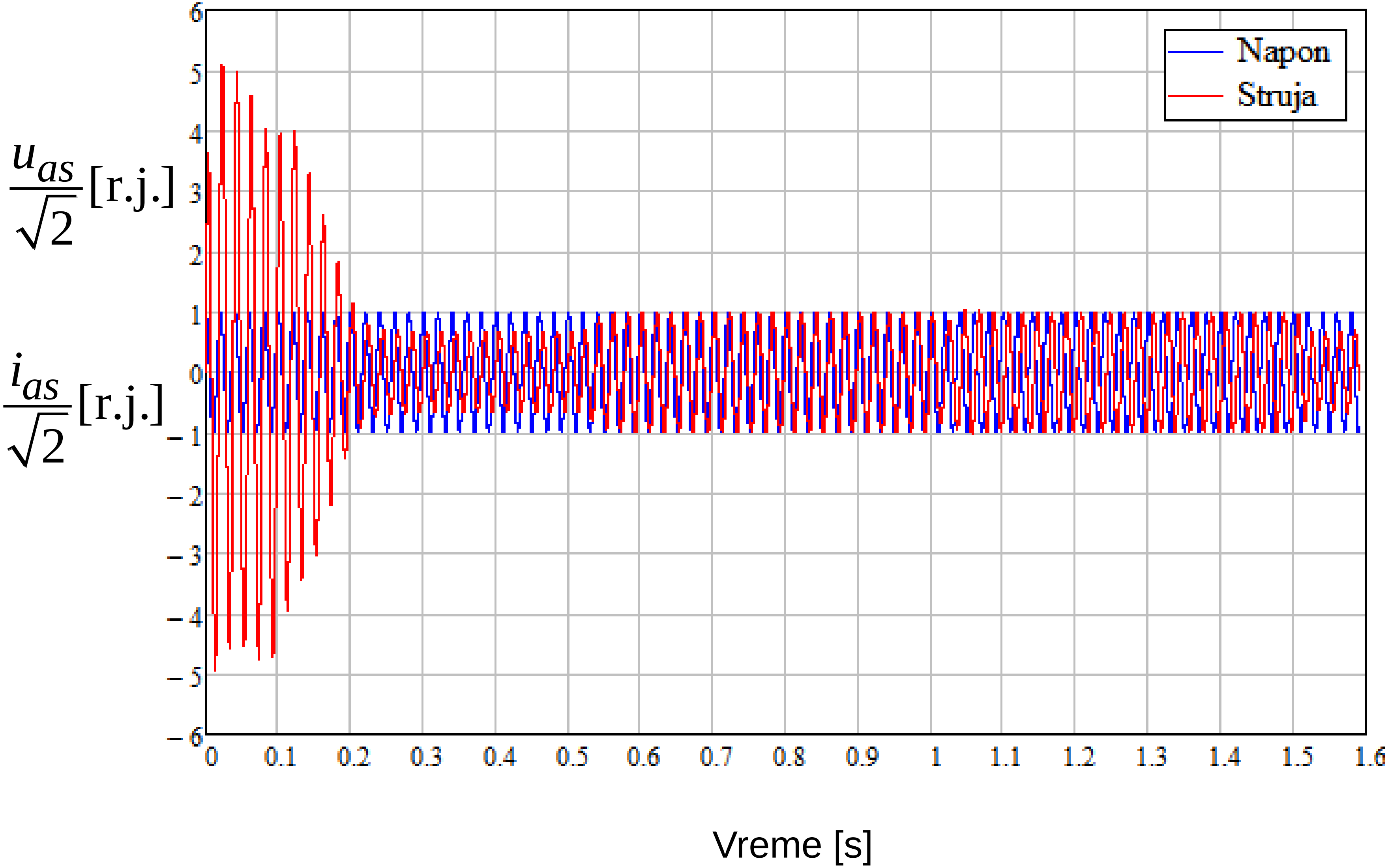
Statička karakteristika i dijagram $m_e(\omega)$



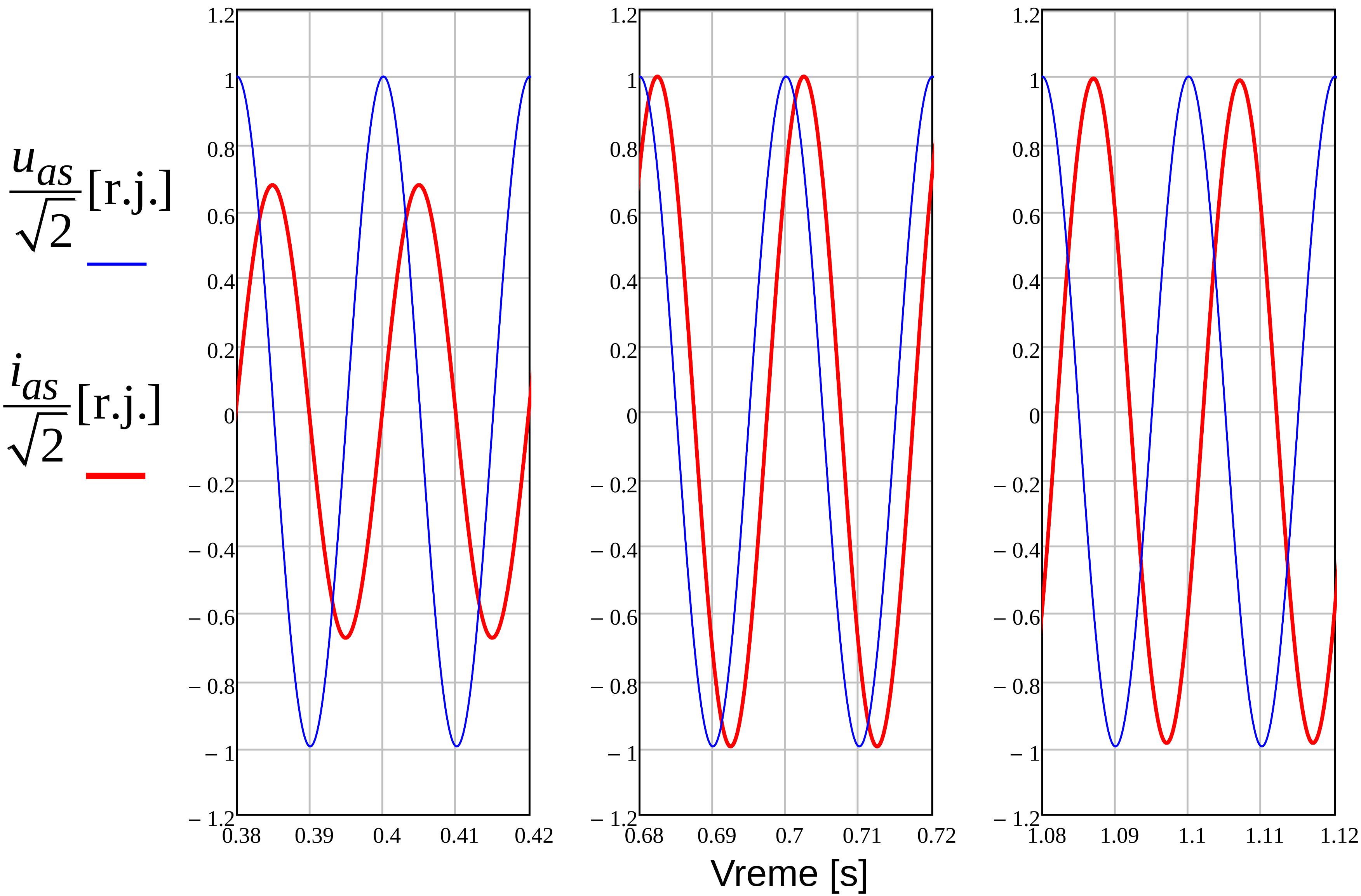
Vremenski dijagrami statorskih struja



Vremenski dijagrami statorskog faznog napona i struje



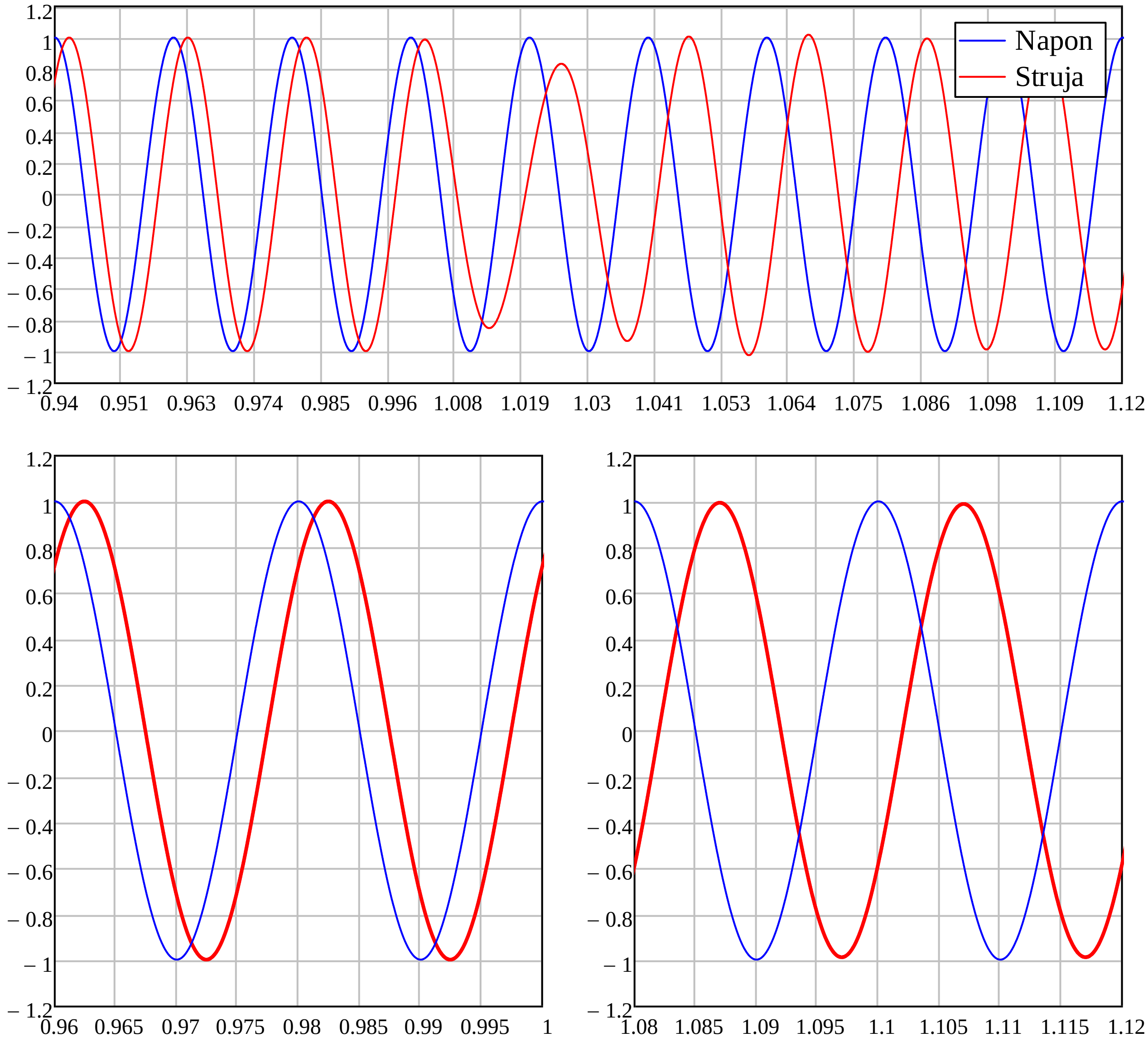
Vremenski dijagrami statorskog faznog napona i struje



Vremenski dijagrami statorskog faznog napona i struje

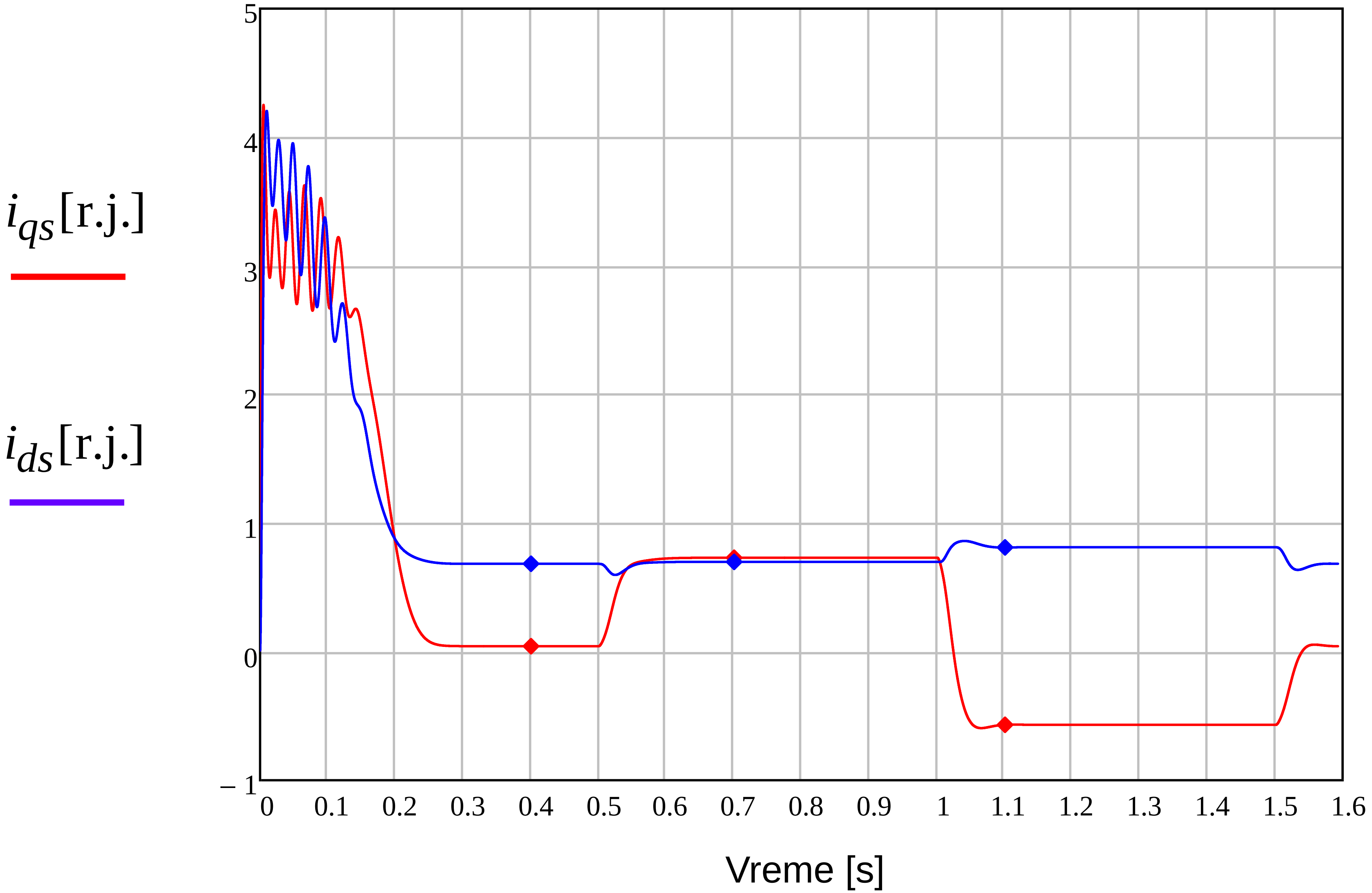
$$\frac{u_{as}}{\sqrt{2}}[\text{r.j.}]$$

$$\frac{i_{as}}{\sqrt{2}}[\text{r.j.}]$$

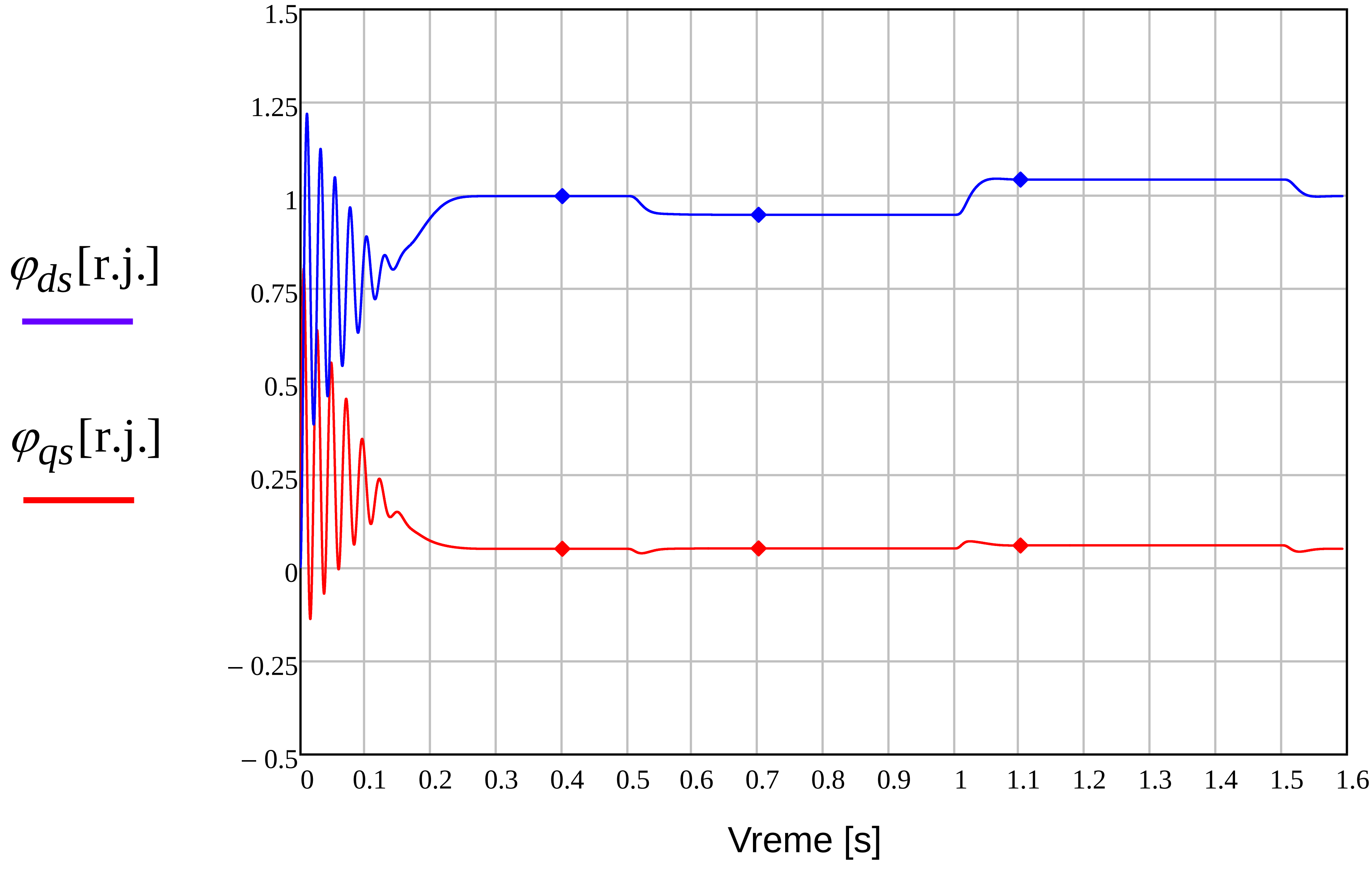


Vreme [s]

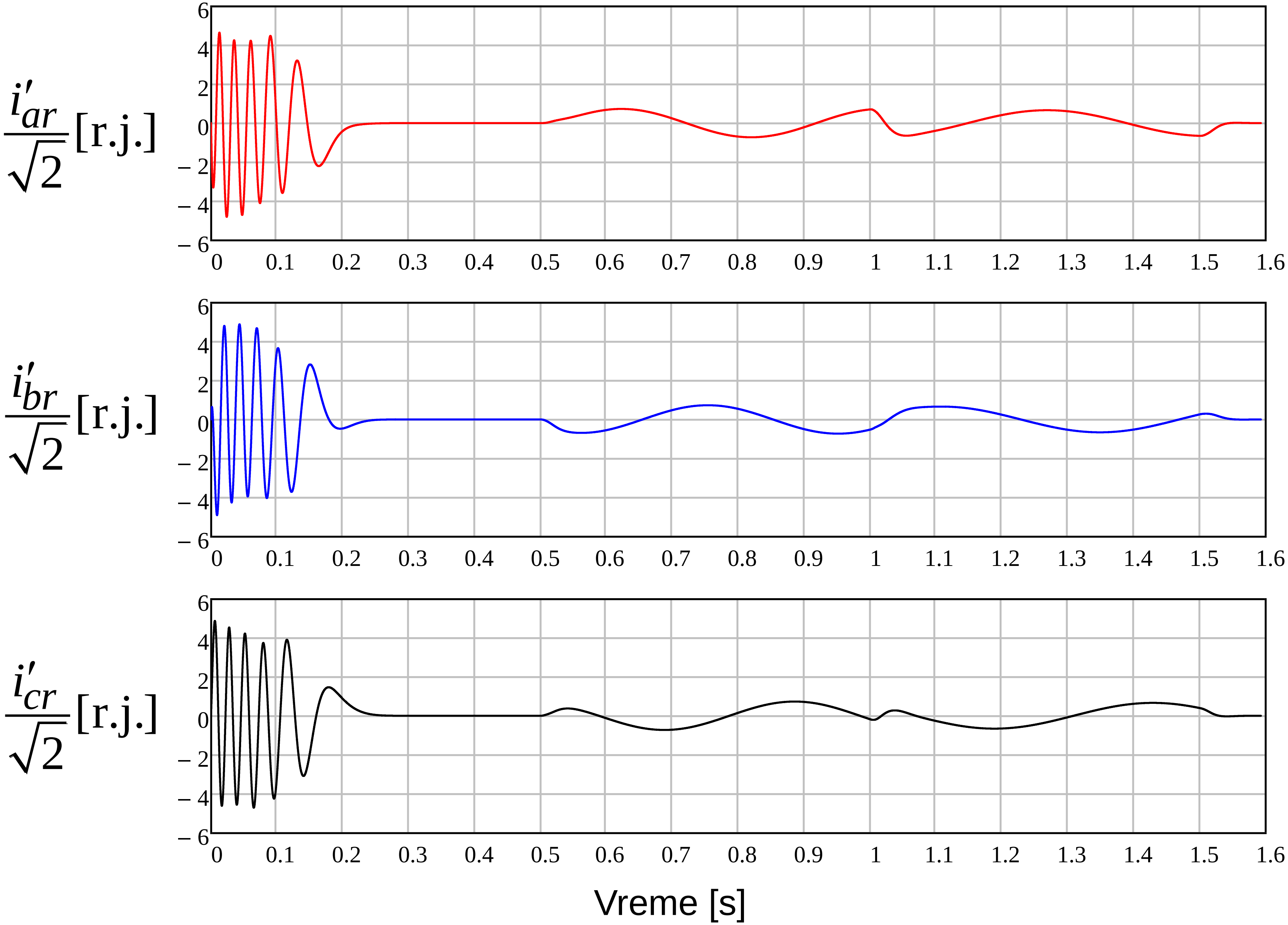
Vremenski dijagrami q i d komponente statorske struje



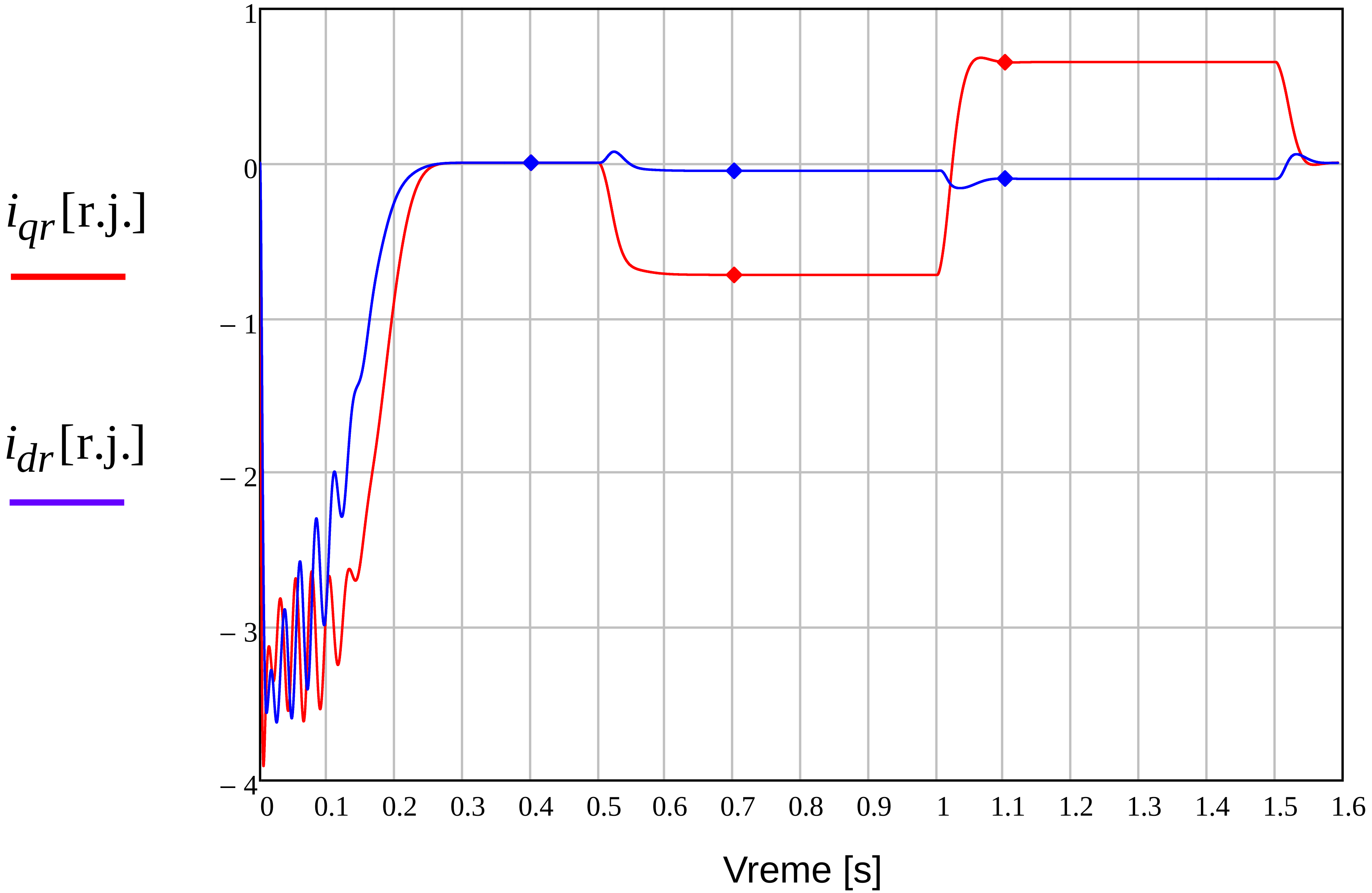
Vremenski dijagrami q i d komponente statorskog fluksa



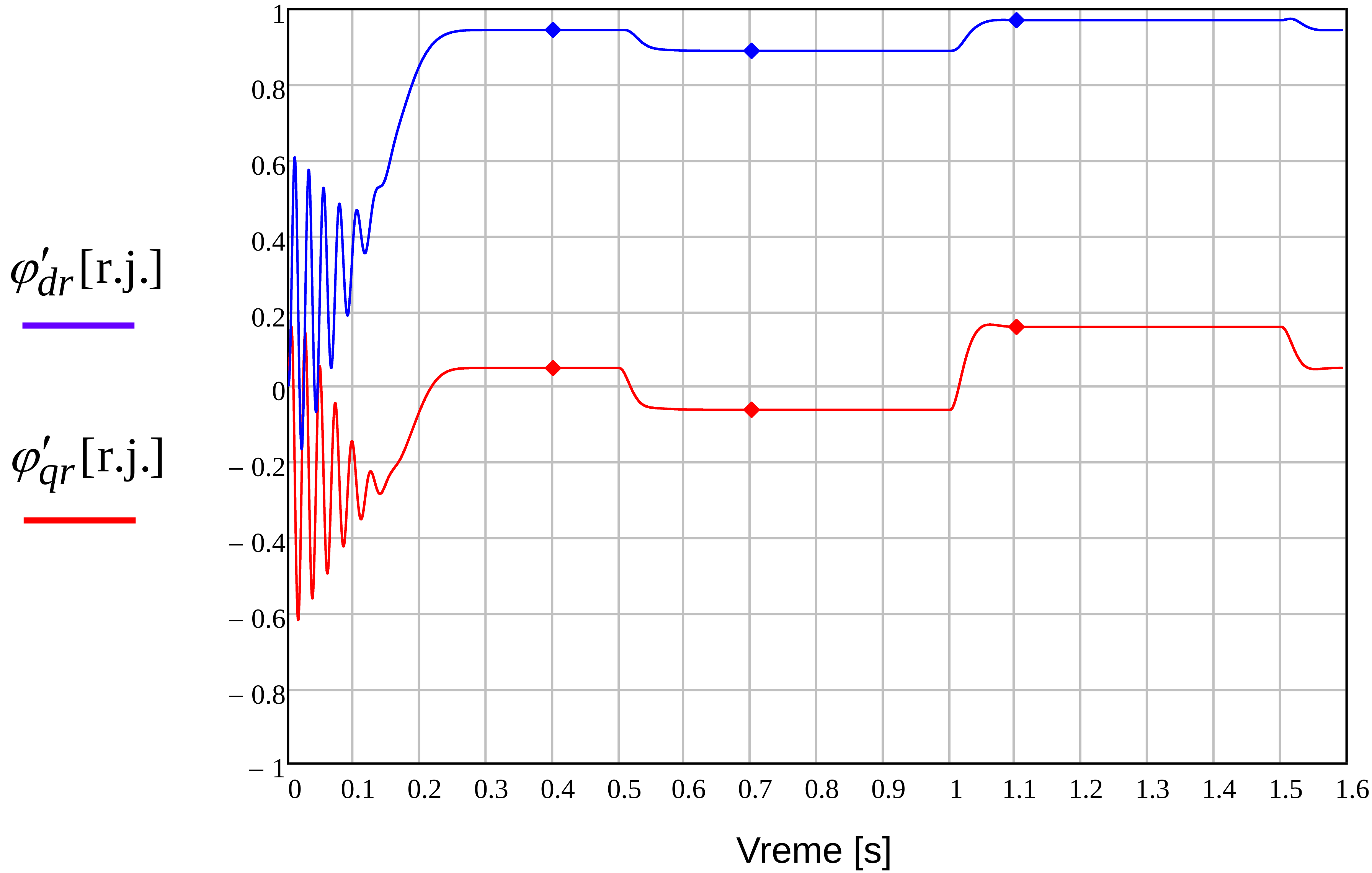
Vremenski dijagrami rotorskih struja



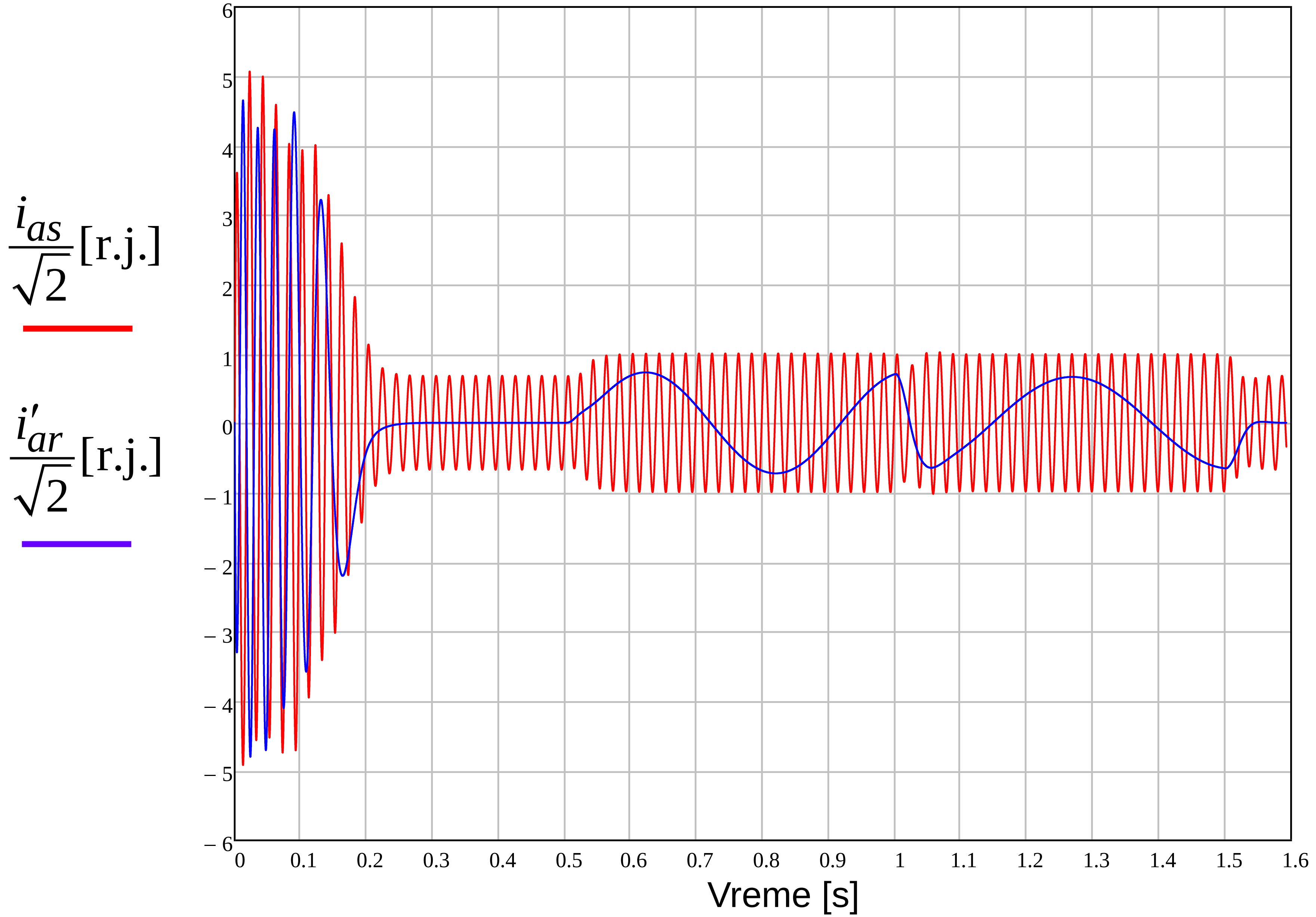
Vremenski dijagrami q i d komponente rotorske struje



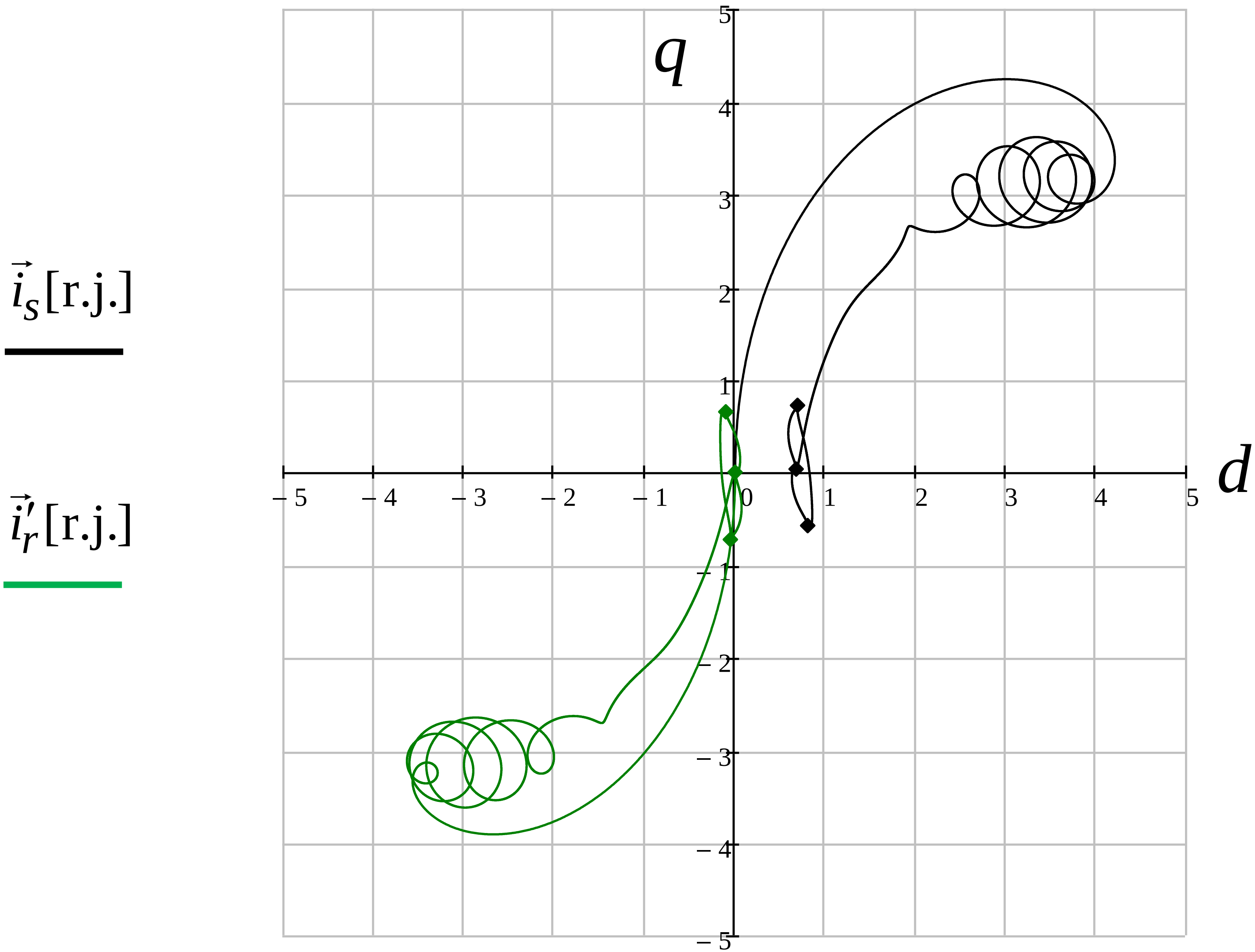
Vremenski dijagrami q i d komponente rotorskog fluksa



Vremenski dijagram statorske i rotorske struje



Dijagrami prostornih vektora statorske i rotorske struje



Dijagrami prostornih vektora statorskog i rotorskog fluksa