KVALITET SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA

Kod projektovanja ili ocene kvaliteta sistema automatskog upravljanja kao što je regulisani elektromotorni pogon, bitna su tri kriterijuma:

- ☑ stabilnost
- ☑ statička karakteristika
- ☑ dinamička karakteristika

→ 3 kriterijuma

Analiza prema redosledu i važnosti:

stabilnost, zatim ponašanje u stacionarnom stanju, i na kraju kvalitet prelaznog režima.

Stabilnost

- Teorema Ljapunova o stabilnosti dinamičkih sistema

Алекса́ндр
Миха́йлович
Ляпуно́в,
1856-1918

Za linearne dinamičke sisteme

- Algebarski kriterijumi stabilnosti
- Grafo-analitički kriterijumi stabilnosti

Za stacionarne, kontinualne, fizički ostvarive, linearne sisteme sa koncentrisanim parametrima, potreban i dovoljan uslov za stabilnost jeste da svi koreni njegove karakteristične jednačine imaju negativne realne delove ili, što je isto, da leže u levoj poluravni kompleksne promenljive *p*. [1].

[1]. M. Stojić, Kontinualni sistemi automatskog upravljanja, Naučna knjiga, Beograd

Kontinualni sistemi

Svi koreni karakteristične jednačine u levoj polovini kompleksne ravni:

$$F_w(p)=\frac{N(p)}{D(p)}$$

$$D(p)=a_n\cdot p^n+\ldots+a_1\cdot p+a_0=a_n\cdot(p-p_1)(p-p_2)\ldots(p-p_n)=0$$

$$\mathrm{Re}(p_i)<0,\quad j=1,\ldots,n$$

U opštem slučaju, za kompleksna rešenja, uslov je
$\mathrm{Re}(p_j)<0$,
U slučaju realnih rešenja karakteristične jednačine,
uslov se svodi se na
$p_j<0$

Diskretni sistemi

Potreban i dovoljan uslov za globalnu asimptotsku stabilnost linearnog digitalnog (diskretnog) sistema

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t_k)$$

je da sve nule svojstvenog polinoma matrice A, odnosno svi koreni karakteristične jednačine

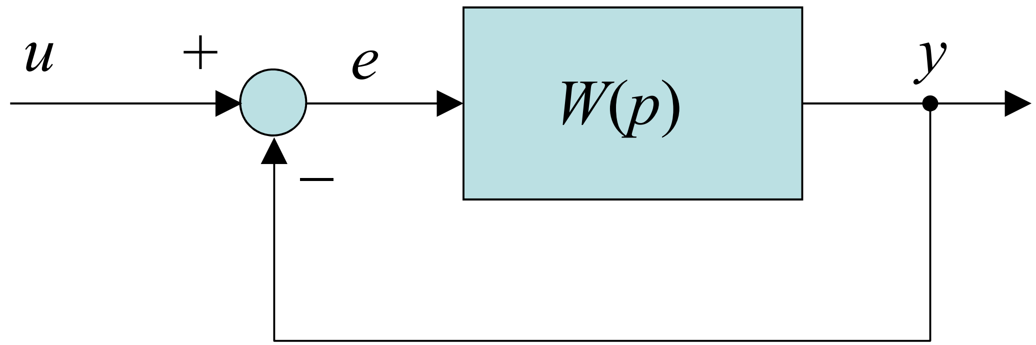
$$\det(z \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

budu po modulu manji od 1 ili, što je isto, da se nalaze unutar jediničnog kruga sa centrom u koordinatnom početku z ravni [1].

[1]. M. Stojić, Digitalni sistemi upravljanja, Nauka, Beograd

Statičke karakteristike

Posmatrajmo sistem:



$$F_w(p) = \frac{Y}{U}(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)} \quad \Rightarrow \quad Y(p) = \frac{W(p)}{1+W(p)}U(p)$$

Pretpostavimo da je sistem stabilan.

Greška je:

$$E(p)=U(p)-Y(p)=\frac{1}{1+W(p)}U(p)$$

$$e(\infty)=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{t\to\infty}\big(u(t)-y(t)\big)=\lim_{p\to 0}pE(p)$$

Odnosno:

$$e(\infty)=\left.\frac{p\cdot U(p)}{1+W(p)}\right|_{p\to 0}$$

Uzmimo dalje da se *W(p)* u opštem slučaju može predstaviti u obliku:

$$W(p)=\frac{k\cdot P(p)}{p^r\cdot Q_0(p)}$$

$$P(0)=Q_0(0)=1$$

r - je astatizam sistema

Astatizam sistema

$$W(p) = \frac{k \cdot P(p)}{p^r \cdot Q_0(p)} \qquad P(0) = Q_0(0) = 1$$

ako je $r = 0$ (nulti astatizam),

$$\lim_{p \to 0} W(p) = k_p \qquad \lim_{p \to 0} p \cdot W(p) = 0 \qquad \lim_{p \to 0} p^2 \cdot W(p) = 0$$

ako je $r = 1$ (astatizam prvog reda),

$$\lim_{p \to 0} W(p) = \infty \qquad \lim_{p \to 0} p \cdot W(p) = k_v \qquad \lim_{p \to 0} p^2 \cdot W(p) = 0$$

ako je $r = 2$ (astatizam drugog reda),

$$\lim_{p \to 0} W(p) = \infty \qquad \lim_{p \to 0} p \cdot W(p) = \infty \qquad \lim_{p \to 0} p^2 \cdot W(p) = k_u$$

Konstanta položaja

Brzinska konstanta

Konstanta ubrzanja

Sistem nultog astatizma

$$\lim_{p\to 0} W(p) = k_p = k \quad \text{- konstanta položaja}$$

Posmatrajmo sistem kada se na ulaz dovede odskočni signal:

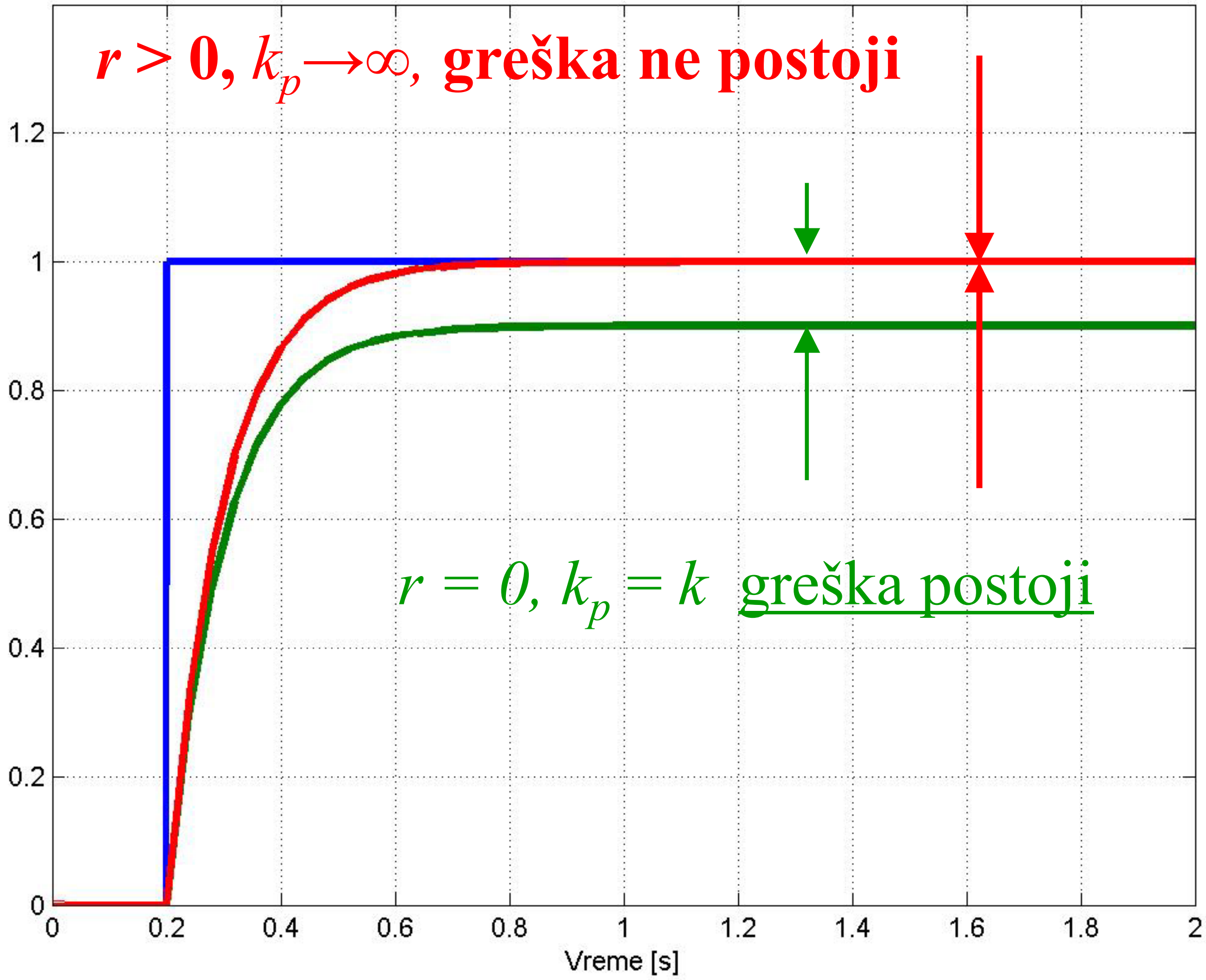
$$u(t) = u_0 \cdot h(t) \qquad U(p) = \frac{u_0}{p}$$

$$e(\infty) = \left. \frac{p \cdot \frac{u_0}{p}}{1 + W(p)} \right|_{p\to 0} = \frac{u_0}{1+k}$$

ako je $r = 0,\ k_p = k$ greška postoji $e(\infty) = u_0/(1+k)$

za $r > 0,\ k_p \to \infty$ greška ne postoji $e(\infty) \to 0.$

Odziv sistema sa nultim astatizmom u vremenskom domenu.



Sistemi sa astatizmom prvog reda

$$\lim_{p \to 0} pW(p) = k_v = k$$ - brzinska konstanta

Posmatrajmo sistem kada se na ulaz dovede linearna funkcija (rampa):

$$u(t) = u_0 \cdot t \qquad U(p) = \frac{u_0}{p^2}$$

Primer „soft start”
Konstantno ubrzanje.

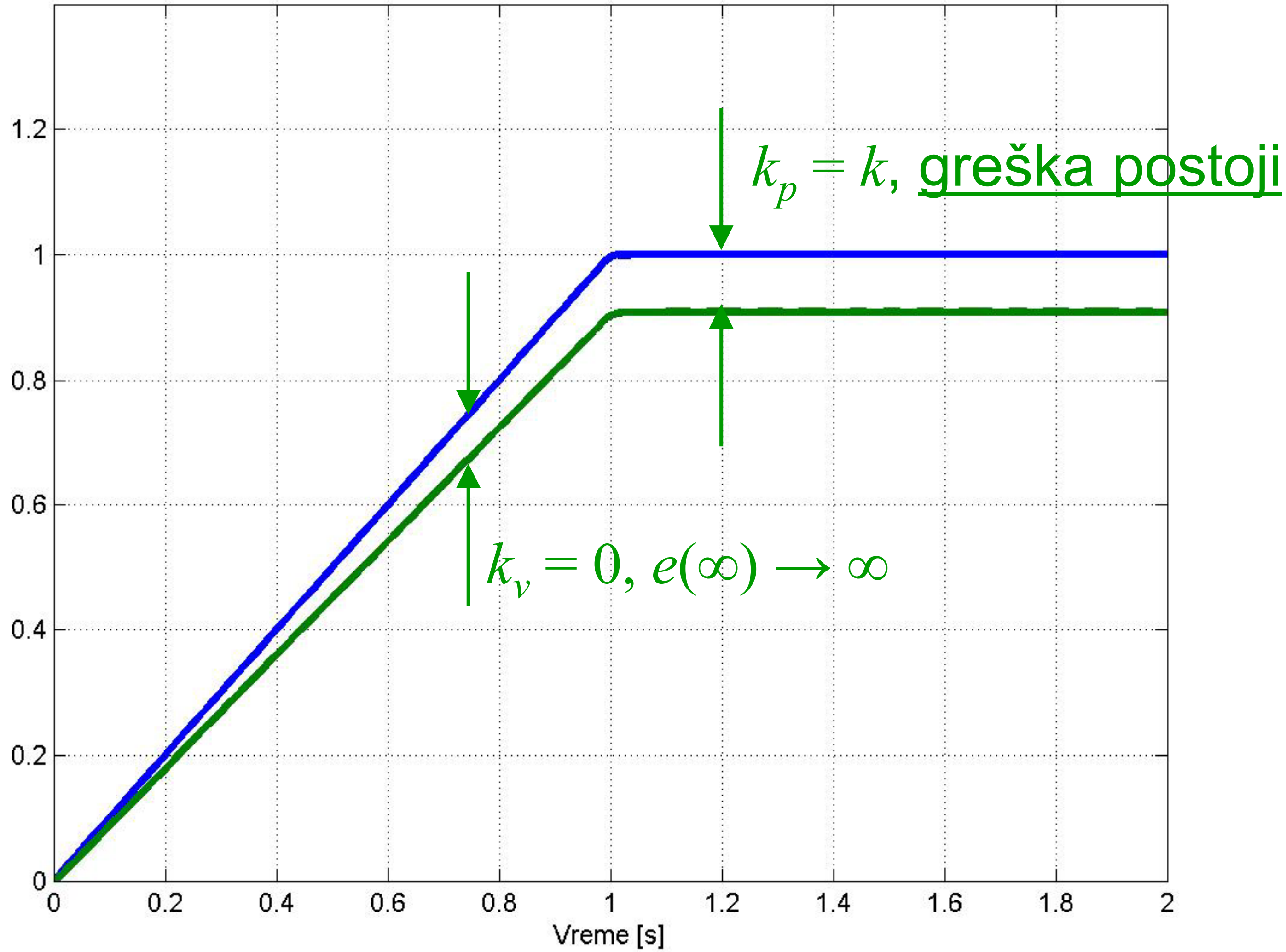
$$e(\infty) = \left. \frac{\frac{u_0}{p}}{1 + W(p)} \right|_{p \to 0} = \frac{u_0}{k}$$

$r = 0 \quad k_v = 0 \quad e(\infty) \to \infty$ Greška se povećava.

$r = 1 \quad k_v = k \quad e(\infty) = u_0 / k$ Greška ima konačnu vrednost.

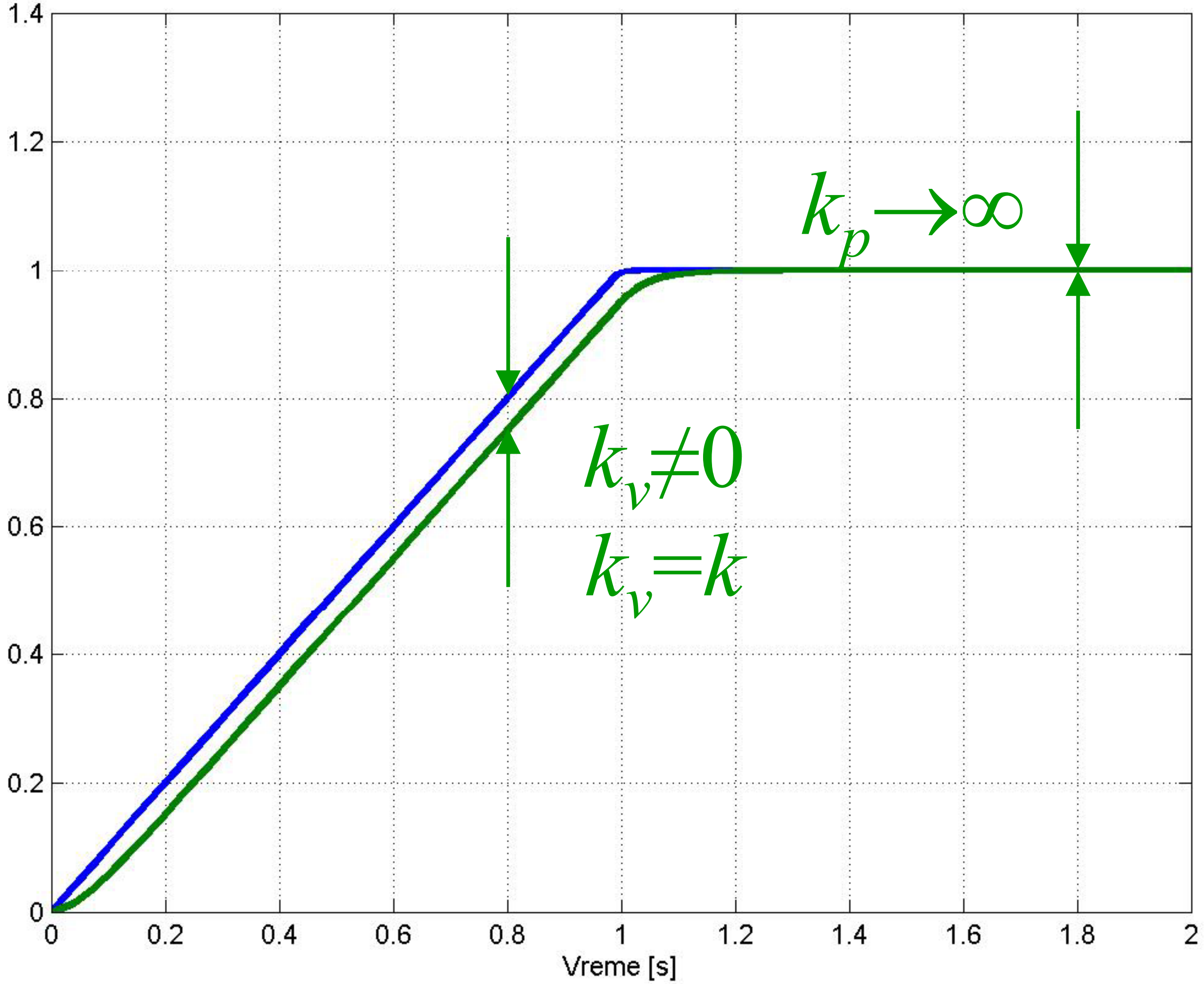
$r > 1 \quad k_v \to \infty \quad e(\infty) = 0$ Greška ne postoji.

$r = 0$



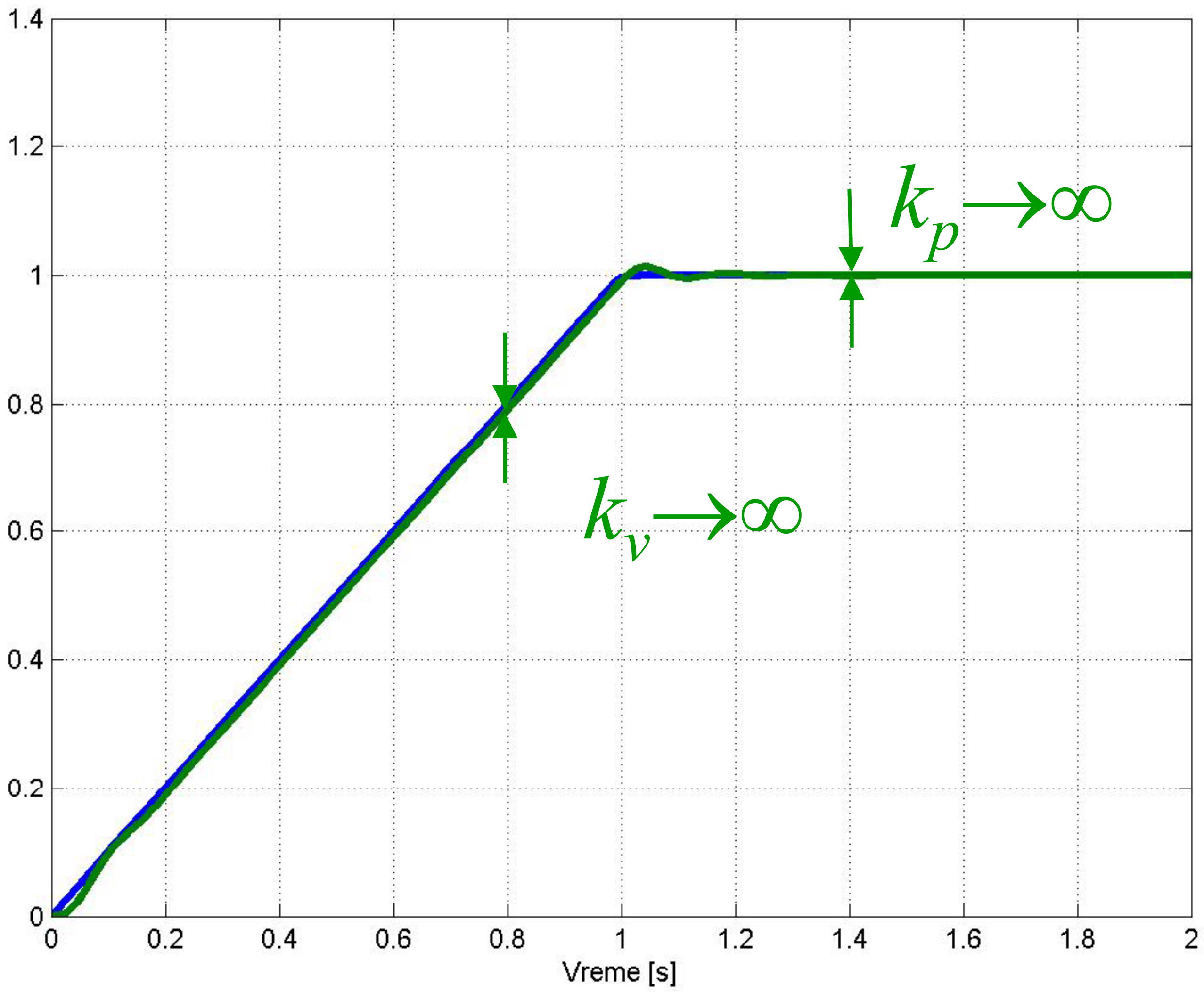
Vremenski odziv sistema sa astatizmom **nultog** reda kada se na ulaz dovede "rampa" funkcija.

$r = 1$



Vremenski odziv sistema sa astatizmom **prvog** reda kada se na ulaz dovede “rampa” funkcija

$r = 2$



Vremenski odziv sistema sa astatizmom **drugog** reda kada se na ulaz dovede “rampa” funkcija

Sistemi sa astatizmom drugog reda

$$\lim_{p\to 0} p^2 \cdot W(p) = k_u = k$$ - konstanta ubrzanja

Posmatrajmo sistem kada se na ulaz dovede polinomijalna funkcija (na pr. kvadratna):

$$u(t) = u_0 \cdot t^2 \qquad U(p) = \frac{u_0}{p^3}$$

$$e(\infty) = \left. \frac{\frac{u_0}{p^2}}{1 + W(p)} \right|_{p\to 0} = \frac{u_0}{k}$$

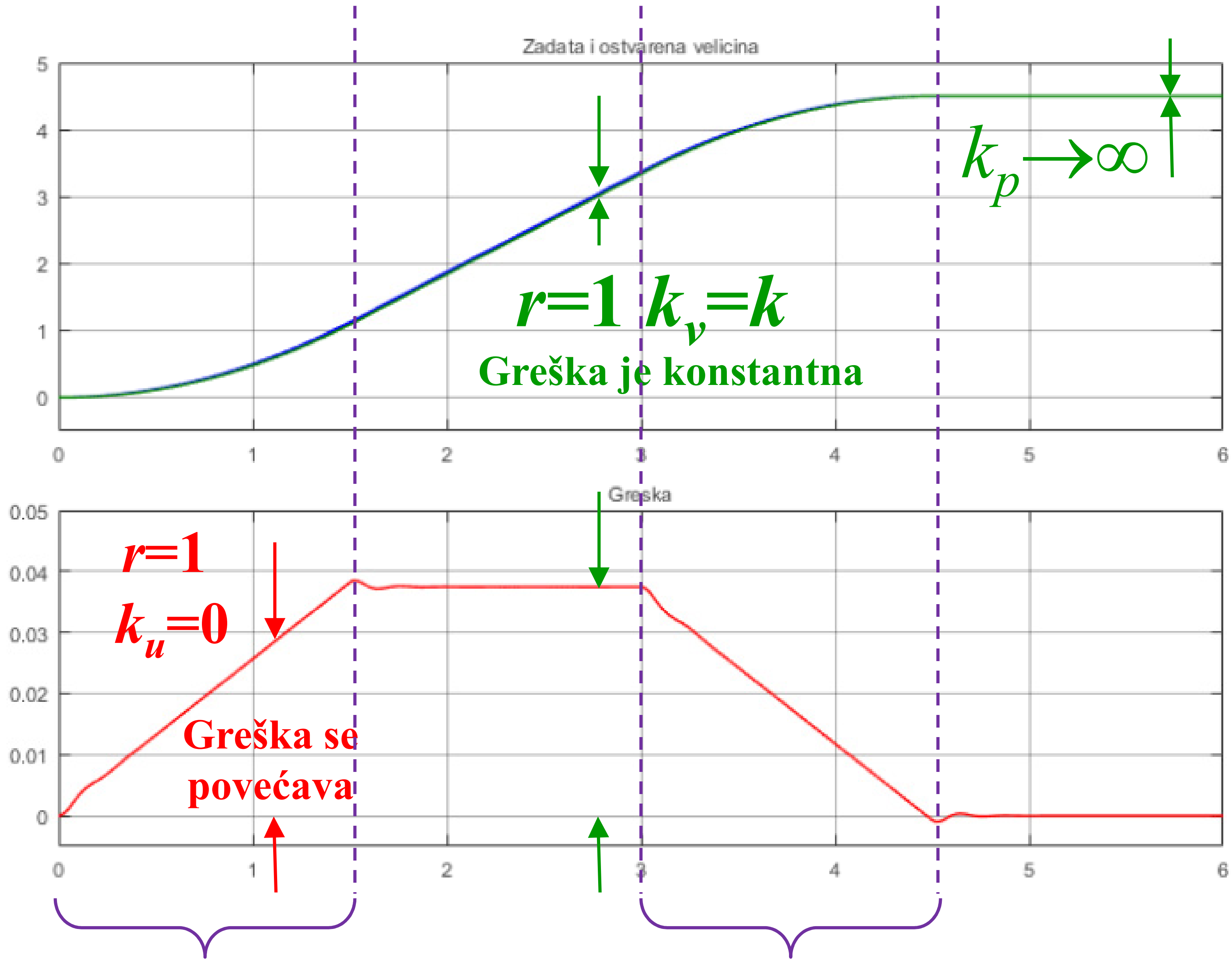
Primer: zadavanje ciljne (referentne) pozicije kod sistema za pozicioniranje.

$r < 2 \quad k_u = 0 \quad e(\infty) \to \infty$ Greška se povećava.

$r = 2 \quad k_u = k \quad e(\infty) = u_0 / k$ Greška ima konstantnu vrednost.

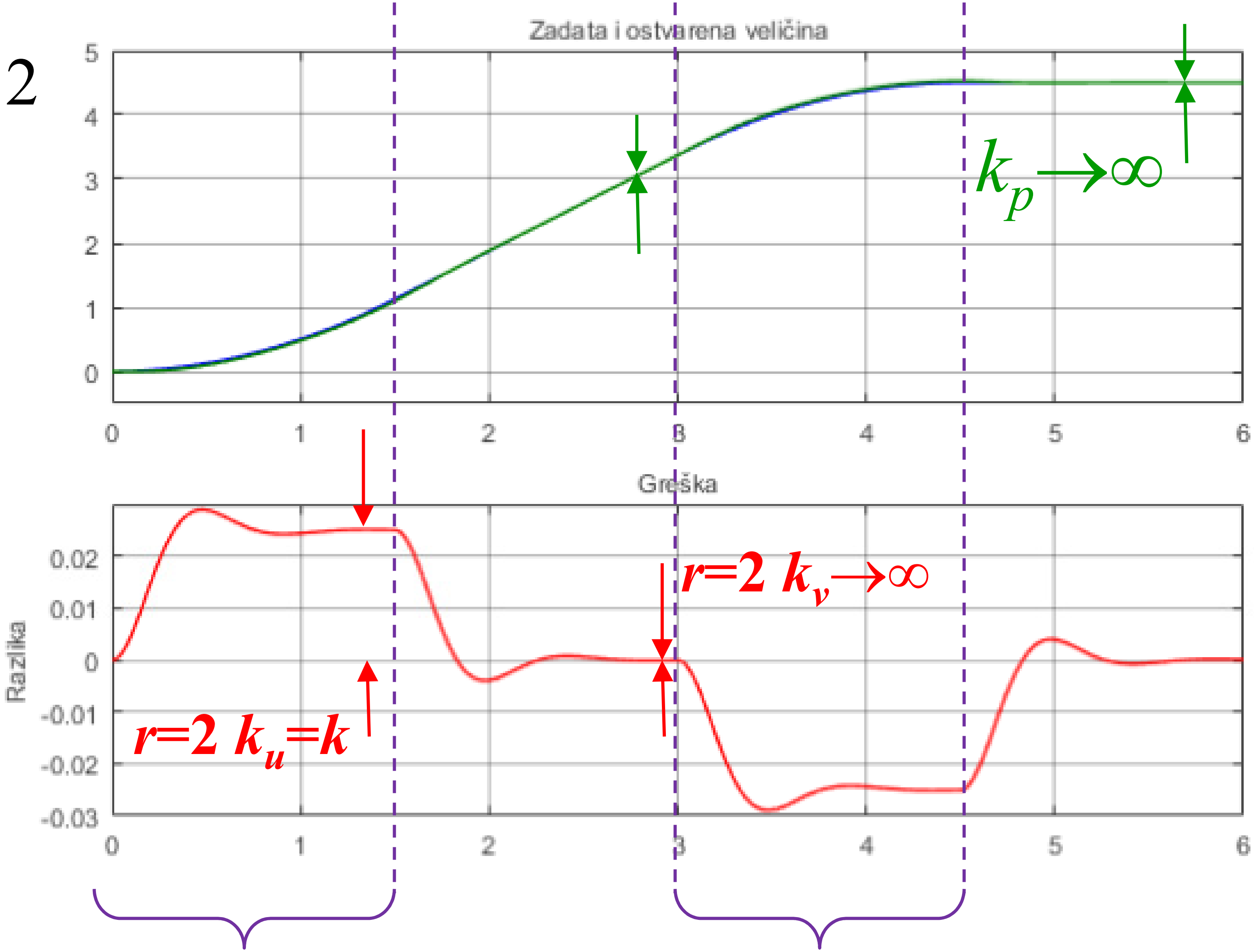
$r > 2 \quad k_u \to \infty \quad e(\infty) = 0$ Greška ne postoji.

$r = 1$



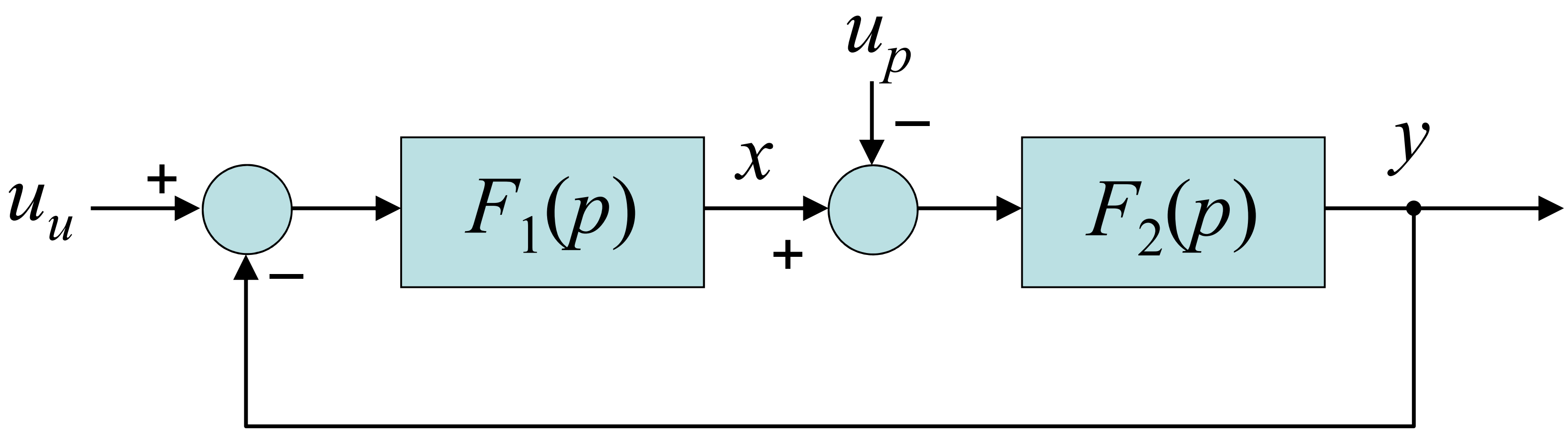
Odziv sistema kada se na ulaz dovede signal sa kvadratnom zavisnosti od vremena

$r = 2$



Odziv sistema kada se na ulaz dovede signal
sa kvadratnom zavisnosti od vremena

Statička greška kod sistema sa dva ulaza



u_u – *Upravljački ulaz*

u_p – *Poremećaj*

Statička greška kod sistema sa dva ulaza

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty}\left(u_u(t) - y(t)\right) = \lim_{p\to 0} p\cdot E(p)$$

$$E(p) = U_u(p) - Y(p)$$

$$X(p) = F_1(p)\cdot\left(U_u(p) - Y(p)\right)$$

$$Y(p) = F_2(p)\cdot\left(X(p) - U_p(p)\right)$$

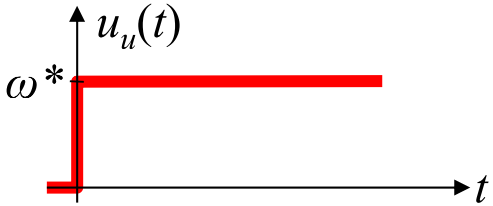
$$y(p) = \frac{F_2}{1+F_1\cdot F_2}\cdot\left(F_1\cdot U_u(p) - U_p(p)\right)$$

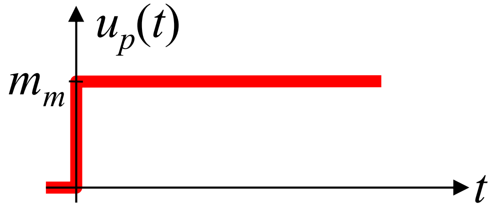
$$E(p) = \frac{1}{1+F_1\cdot F_2}\cdot U_u(p) + \frac{F_2}{1+F_1\cdot F_2}\cdot U_p(p)$$

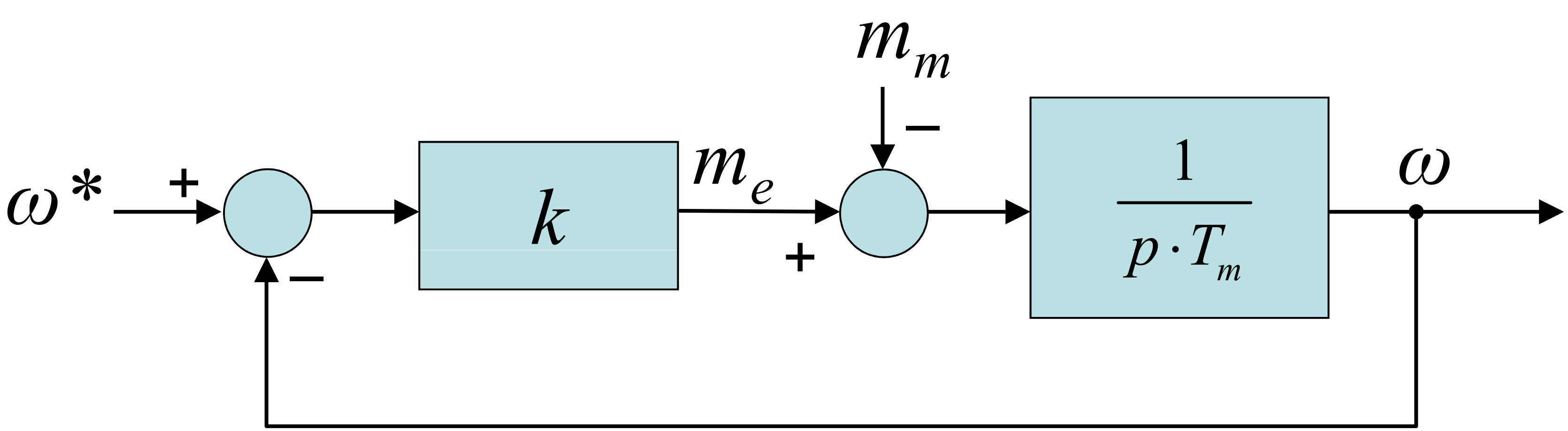
Uprošćeni primer regulisanog pogona

$$U_u(p) = \frac{\omega^*}{p}$$

$$U_p(p) = \frac{m_m}{p}$$

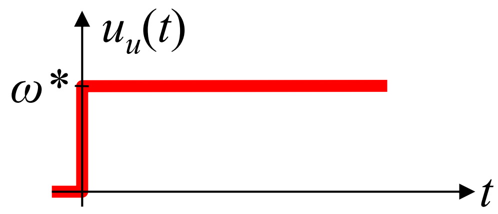


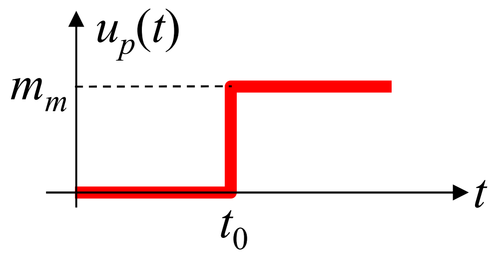


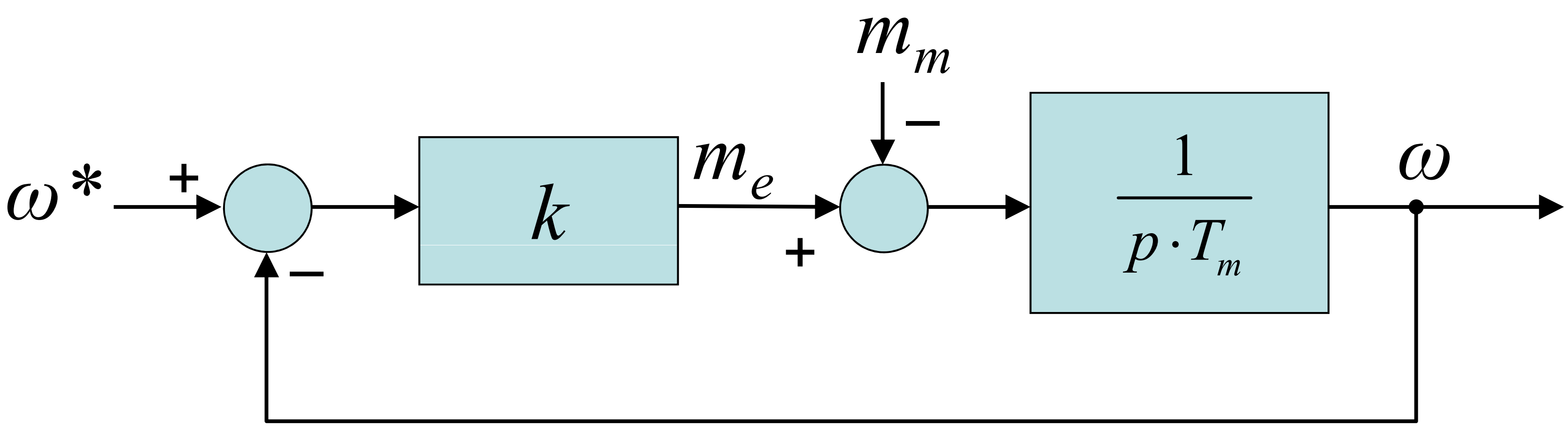


Odloženo dejstvo poremećaja

$$U_u(p) = \frac{\omega^*}{p} \qquad\qquad U_p(p) = \frac{m_m}{p} \cdot e^{-p \cdot t_0}$$







Uprošćeni primer regulisanog pogona

a) Proporcionalni regulator brzine, veoma brz odziv momenta, Njutnova jednačina

$$F_1(p) = k \qquad F_2(p) = \frac{1}{p \cdot T_m} \qquad E(p) = \frac{1}{1+F_1 \cdot F_2} \cdot U_u(p) + \frac{F_2}{1+F_1 \cdot F_2} \cdot U_p(p)$$

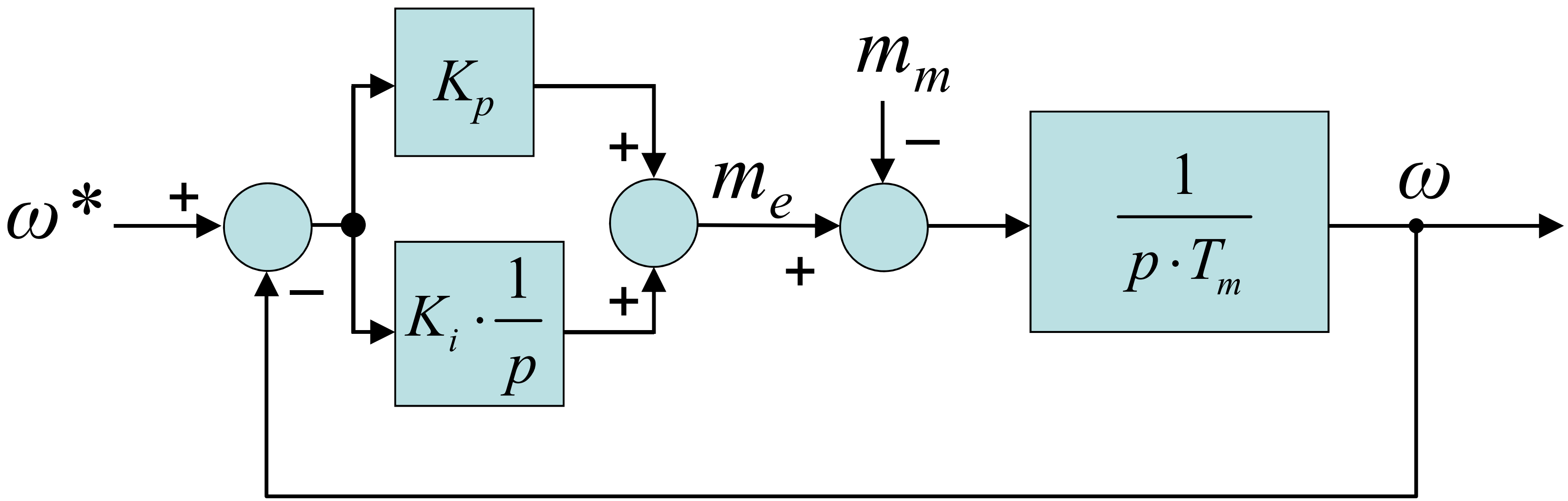
$$m_m = 0 \qquad e(\infty) = \lim_{p \to 0} \left[\frac{p \cdot \frac{\omega^*}{p}}{1 + \frac{k}{p \cdot T_m}} \right] = 0$$

$$m_m \neq 0 \qquad e(\infty) = \lim_{p \to 0} \left[\frac{p \cdot \frac{\omega^*}{p}}{1 + \frac{k}{p \cdot T_m}} + \frac{p \cdot \frac{m_m}{p} \cdot \frac{1}{p \cdot T_m}}{1 + \frac{k}{p \cdot T_m}} \right] = \frac{m_m}{k}$$

Uprošćeni primer regulisanog pogona

b) Proporcionalno-Integralni regulator brzine, veoma brz odziv momenta, Njutnova jednačina

$$F_1(p) = k\frac{1 + p \cdot T_i}{p \cdot T_i} = K_p + K_i \cdot \frac{1}{p} \qquad F_2(p) = \frac{1}{p \cdot T_m}$$



Uprošćeni primer regulisanog pogona

b) Proporcionalno-Integralni regulator brzine, veoma brz odziv momenta, Njutnova jednačina

$$F_1(p) = k\frac{1+p\cdot T_i}{p\cdot T_i} \qquad\qquad F_2(p) = \frac{1}{p\cdot T_m}$$

$$m_m = 0 \qquad e(\infty) = \lim_{p\to 0}\left[\frac{p\cdot\frac{\omega^*}{p}}{1+k\cdot\frac{1+p\cdot T_i}{p\cdot T_i}\cdot\frac{1}{p\cdot T_m}}\right] = 0$$

$m_m \neq 0$

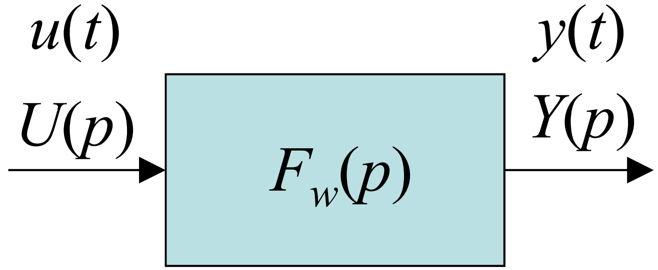
$$e(\infty) = \lim_{p\to 0}\left[\frac{p\cdot\frac{\omega^*}{p}}{1+k\cdot\frac{1+p\cdot T_i}{p\cdot T_i}\cdot\frac{1}{p\cdot T_m}} + \frac{p\cdot\frac{m_m}{p}\cdot\frac{1}{p\cdot T_m}}{1+k\cdot\frac{1+p\cdot T_i}{p\cdot T_i}\cdot\frac{1}{p\cdot T_m}}\right] = 0$$

Dinamičke karakteristike

- Posmatramo sisteme drugog reda
- Promena upravljačkog ulaza kao “step funkcija”
- Dva različita slučaja:
  - Sa konjugovano kompleksnim polovima.
  - Sa realnim polovima (koji u opštem slučaju nisu jednaki, ali bi mogli biti).

Dominantni konjugovano-kompleksni polovi

$$F_w(p) = \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot p + \omega_n^2}$$



$$u(t) = u_0 \cdot h(t) \qquad\qquad U(p) = \frac{u_0}{p}$$

$$Y(p) = U(p) \cdot F_w(p) = \frac{u_0}{p} \cdot \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot p + \omega_n^2}$$

$$y(t) = £^{-1}\left[U(p) \cdot F_w(p)\right] =$$

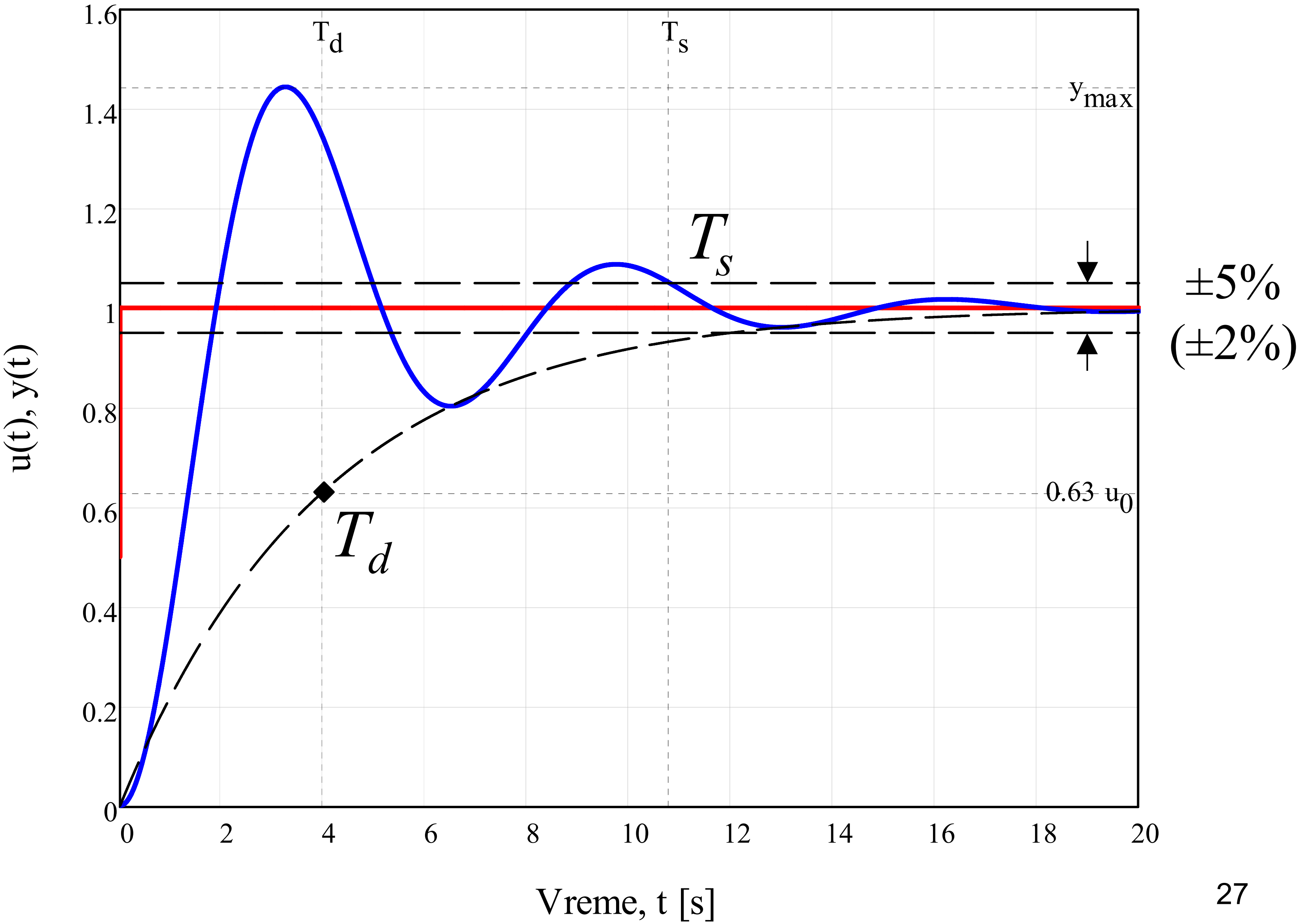
$$= u_0 \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_n \cdot t} \cdot \cos\left(\sqrt{1-\zeta^2} \cdot \omega_n \cdot t - \psi\right)\right]$$

$$\psi = \arccos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\right)$$

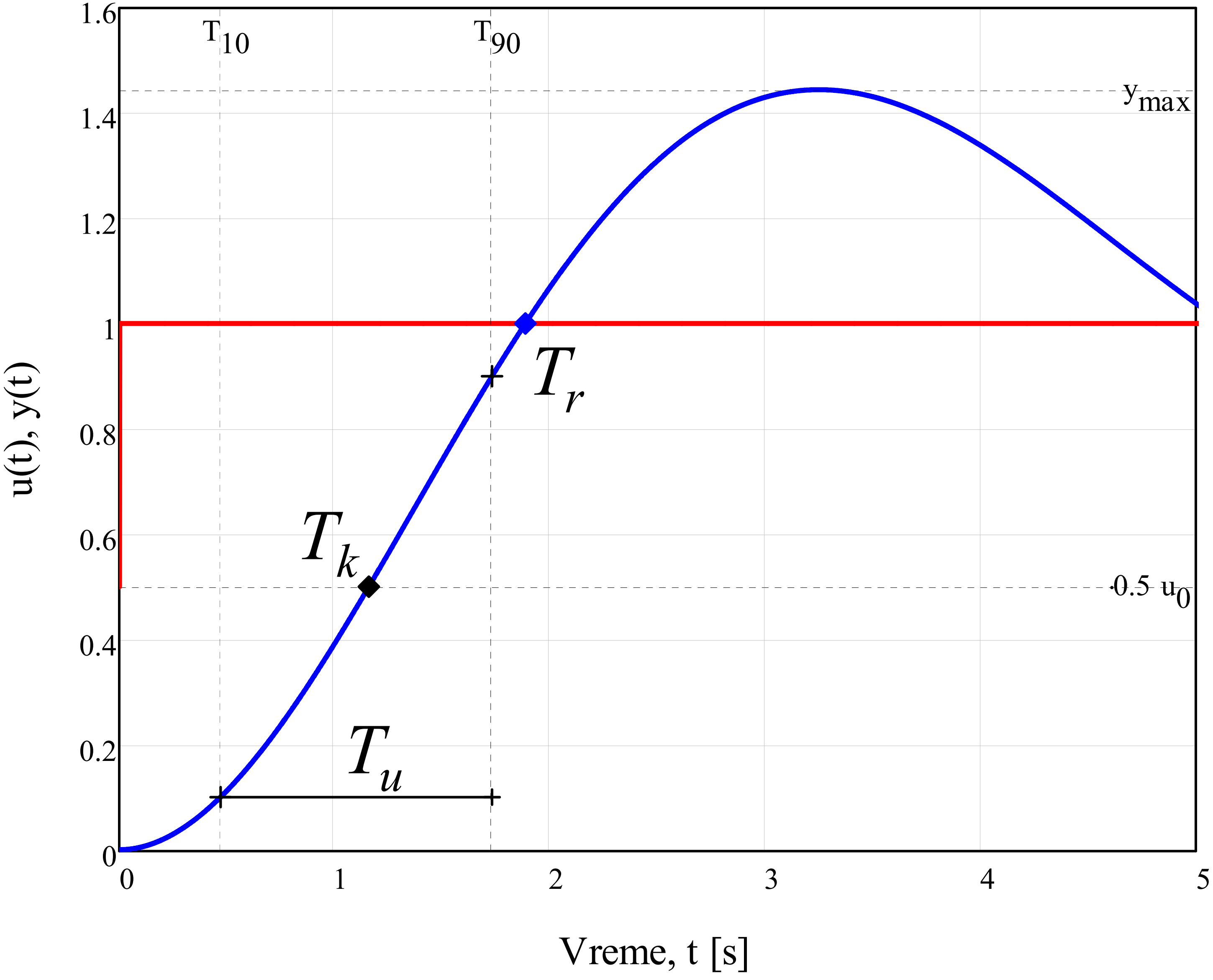
Dominantni konjugovano-kompleksni polovi
Korišćene oznake:

ω_n – prirodna (neprigušena) učestanost
ζ – faktor relativnog prigušenja
π – preskok [%]
T_s – vreme smirivanja
T_k – vreme kašnjenja
τ – period oscilacija
T_u – vreme uspona
T_d – dominantna vremenska konstanta
T_r – vreme reagovanja

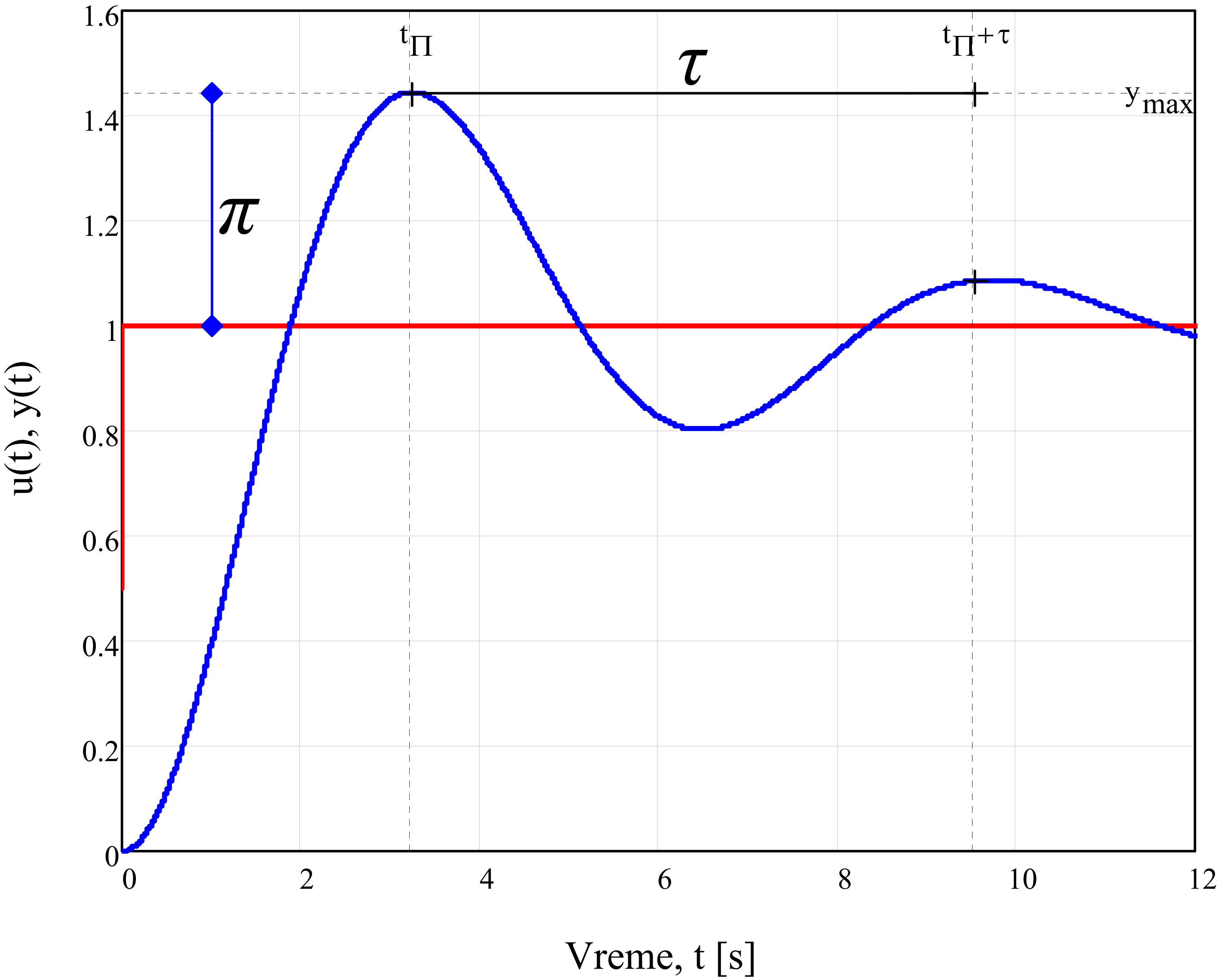
Dominantni konjugovano-kompleksni polovi



Dominantni konjugovano-kompleksni polovi



Dominantni konjugovano-kompleksni polovi

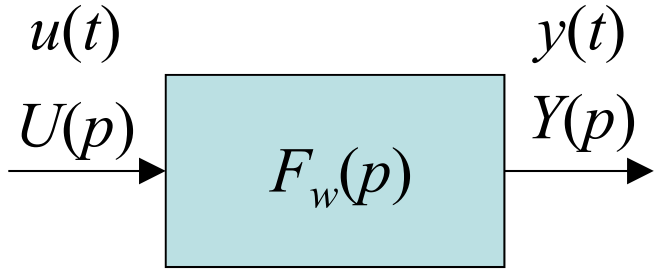


Dominantni realni polovi (dva realna pola)

$$F_w(p) = \frac{p_1 \cdot p_2}{\left(p + p_1\right) \cdot \left(p + p_2\right)} = \frac{1}{\left(T_1 \cdot p + 1\right) \cdot \left(T_2 \cdot p + 1\right)}$$

$$T_1 = \frac{1}{p_1} \qquad T_2 = \frac{1}{p_2} \qquad u(t) = u_0 \cdot h(t) \qquad U(p) = \frac{u_0}{p}$$

$$Y(p) = U(p) \cdot F_w(p)$$



$$y(t) = \pounds^{-1}\left[U(p) \cdot F_w(p)\right] =$$

$$= u_0 \cdot \left[1 - \frac{p_1}{p_1 - p_2} e^{-p_2 \cdot t} + \frac{p_2}{p_1 - p_2} e^{-p_1 \cdot t}\right] =$$

$$= u_0 \cdot \left[1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2}\right]$$

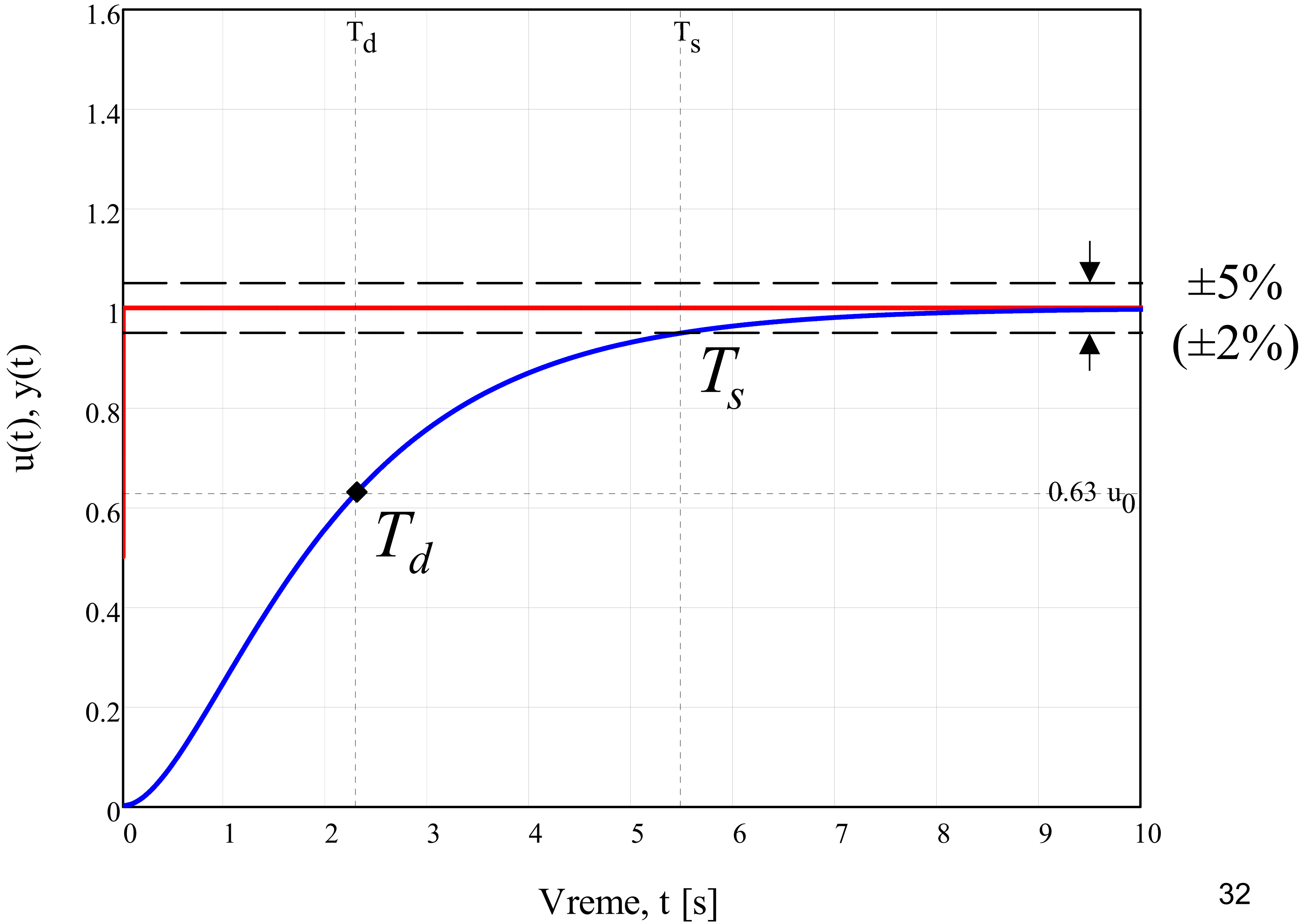
Dominantni realni polovi (dva realna pola)
Korišćene oznake:

T_s – vreme smirivanja
T_k – vreme kašnjenja
T_u – vreme uspona
T_d – dominantna vremenska konstanta

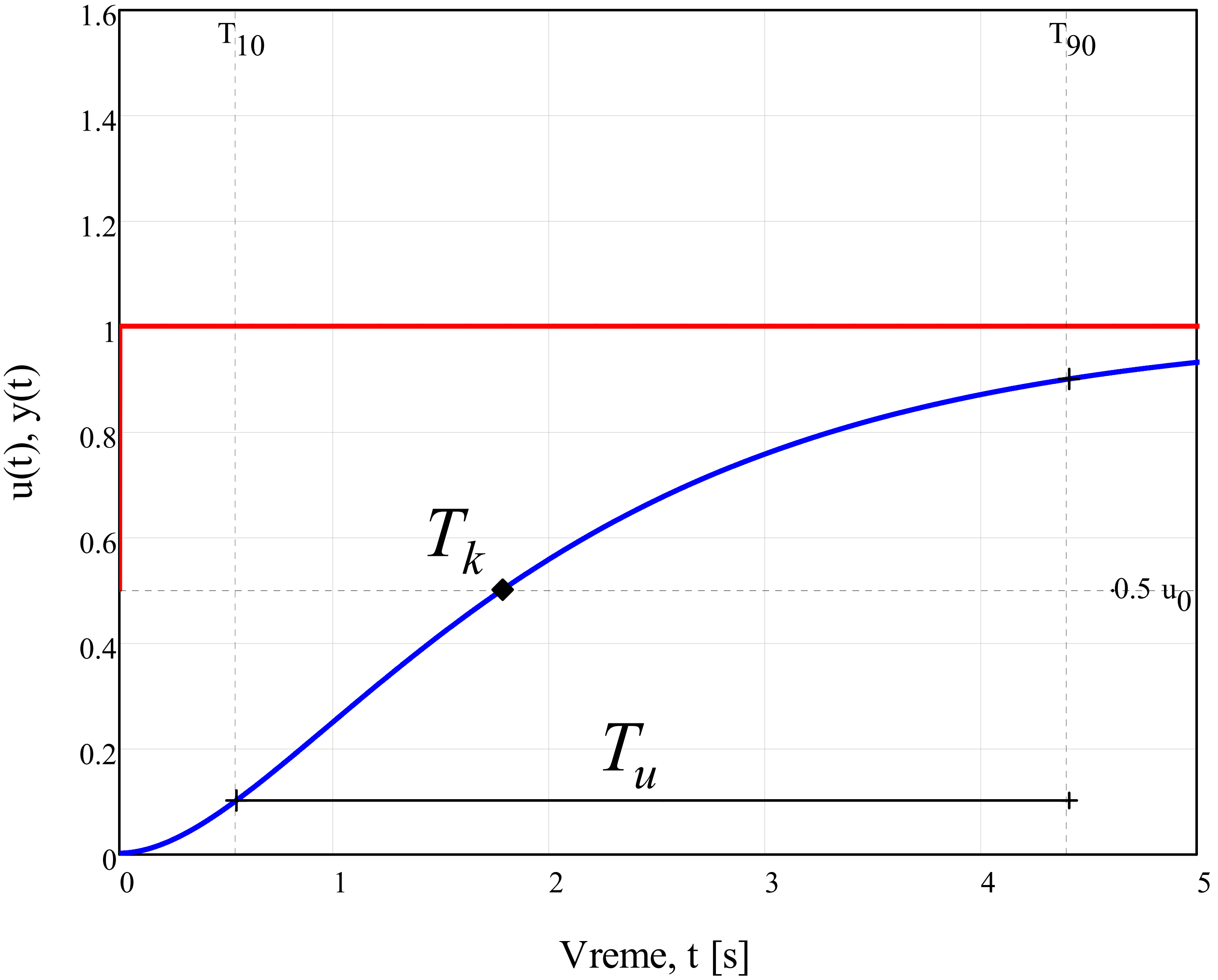
Ne mogu se definisati:

ω_n – prirodna (neprigušena) učestanost
ζ – faktor relativnog prigušenja
π – preskok [%]
τ – period oscilacija
T_r – vreme reagovanja

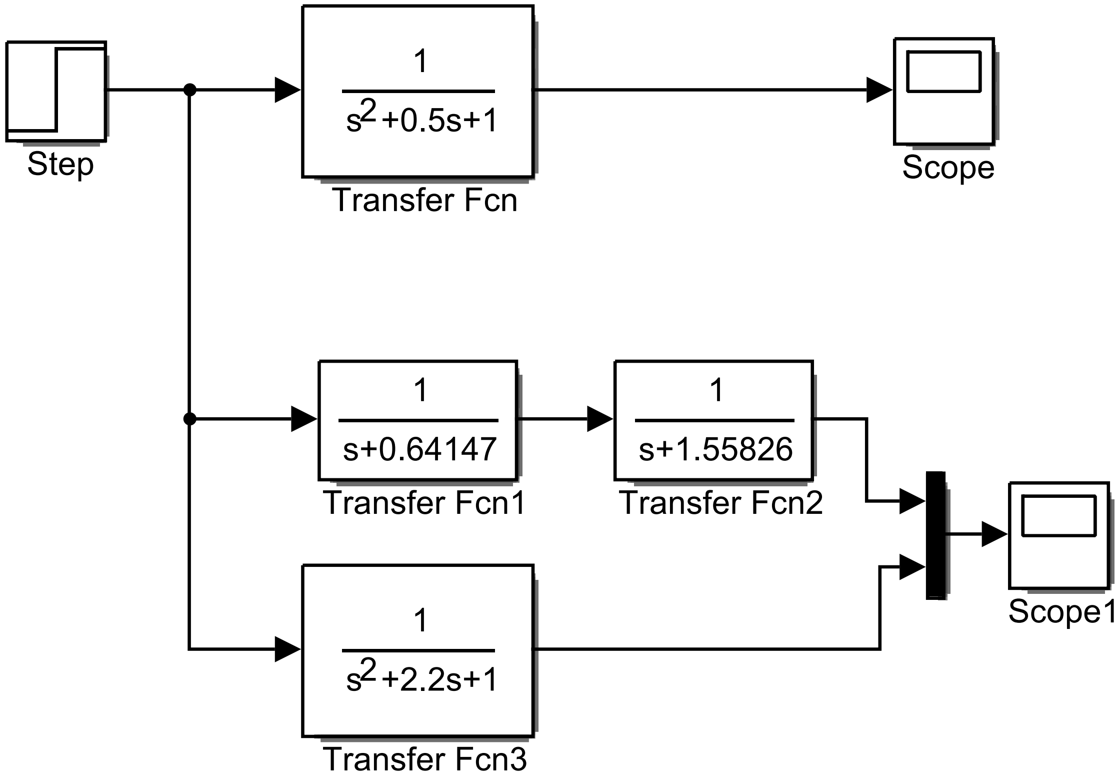
Dominantni realni polovi (dva realna pola)



Dominantni realni polovi (dva realna pola)



Matlab/Simulnik model



$$\frac{2,2 \pm \sqrt{2.2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \begin{cases} 1,55826 \\ 0,64147 \end{cases}$$