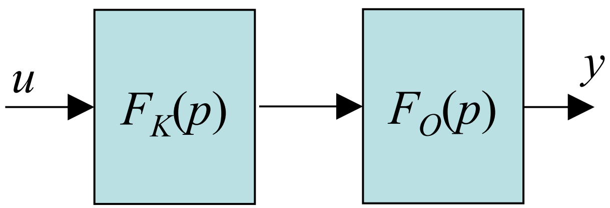
Parametarska sinteza regulatora (izbor parametara)

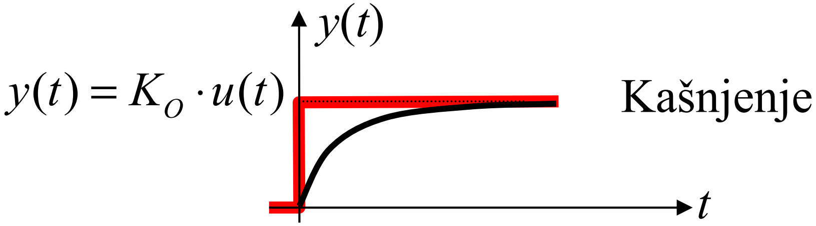
- Ponašanje sistema zavisi od strukture regulatora i od vrednosti parametara
- Struktura regulatora se bira u zavisnosti od strukture objekta (astatizmi)
- Za određenu strukturu potrebno je odabrati odgovarajuće vrednosti parametara
- Parametri sistema su nepromenljivi
- Biramo vrednosti parametara regulatora

Kompenzacija

Posmatrajmo objekat upravljanja sa funkcijom prenosa:

$$F_O(p) = \frac{K_O}{1 + p \cdot T_O}$$





Regulator/kompenzator
(nema povratne sprege)

$$F_K(p) = 1 + p \cdot T_K \qquad T_K = T_O$$

$$F_K(p) \cdot F_O(p) = K_O \cdot \frac{1 + p \cdot T_K}{1 + p \cdot T_O} = K_O$$

Idealni kompenzator.

Kompenzacija sa PD regulatorom

Regulator/kompenzator
(nema povratne sprege)

$$F_R(p) = K_R \cdot (1 + p \cdot T_d)$$

$$F_0(p) = F_R(p) \cdot F_O(p) = K_R \cdot (1 + p \cdot T_d) \cdot \frac{K_O}{1 + p \cdot T_O}$$

Ukoliko je $u(t) = 1 \cdot h(t) \Leftrightarrow U(p) = \frac{1}{p}$ $\qquad Y(p) = F_0(p) \cdot U(p)$

za $t = 0 \Rightarrow p \to \infty$

Teorema početne vrednosti
https://en.wikipedia.org/wiki/Initial_value_theorem

$$\lim_{t \to 0} y(t) = \lim_{p \to \infty} p \cdot Y(p) = \lim_{p \to \infty} p \cdot F_0(p) \cdot \frac{1}{p} = K_R \cdot K_O \cdot \frac{T_d}{T_O}$$

za $t \to \infty \Rightarrow p = 0$

Teorema krajnje vrednosti (ustaljeno stanje)
https://en.wikipedia.org/wiki/Final_value_theorem

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{p \to 0} p \cdot Y(p) = \lim_{p \to \infty} p \cdot F_0(p) \cdot \frac{1}{p} = K_R \cdot K_O$$

Kompenzacija sa PD regulatorom

Regulator/kompenzator
(nema povratne sprege)

$$F_R(p) = K_R \cdot (1 + p \cdot T_d)$$

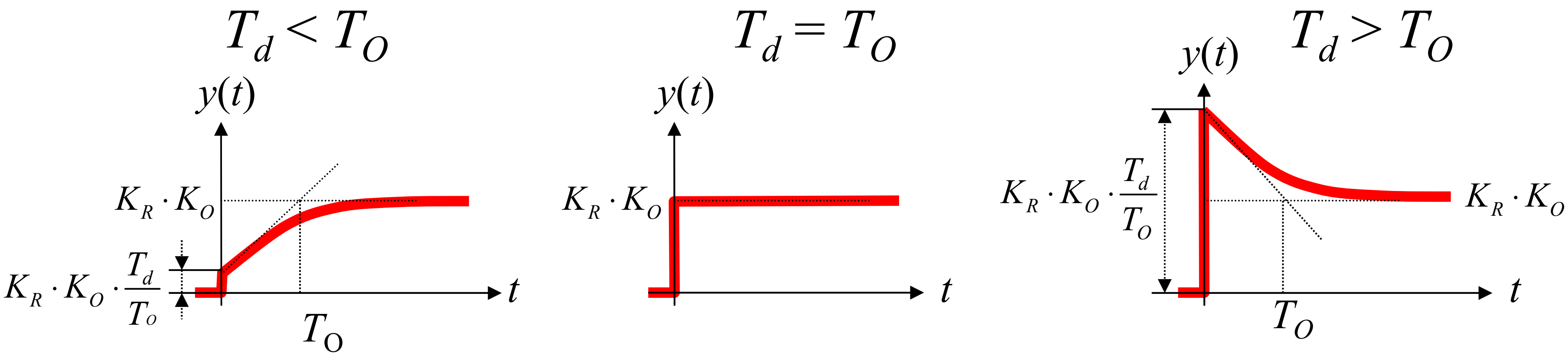
$$F_0(p) = F_R(p) \cdot F_O(p) = K_R \cdot (1 + p \cdot T_d) \cdot \frac{K_O}{1 + p \cdot T_O}$$

$$T_d = T_O \qquad F(p) = K_R \cdot K_O$$

Idealni kompenzator

Ukoliko je, ponovo $u(t) = 1 \cdot h(t) \Leftrightarrow U(p) = \frac{1}{p}$

Vremenski odzivi sistema kompenzovanog PD regulatorom, za različite vrednosti T_d su



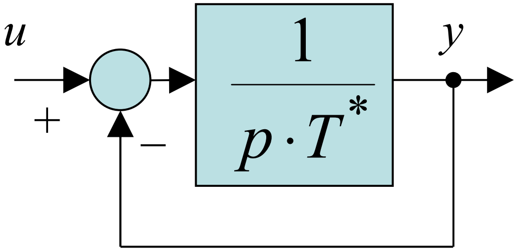
Kompenzacija sa PI regulatorom

Regulator: $$F_R(p) = K_R \frac{1 + p \cdot T_n}{p \cdot T_n}$$

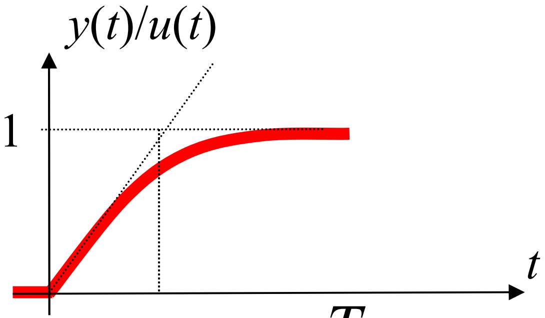
$$F_0(p) = F_R(p) \cdot F_O(p) = K_R \cdot \frac{1 + p \cdot T_n}{p \cdot T_n} \cdot \frac{K_O}{1 + p \cdot T_O} = \frac{K_R \cdot K_O}{p \cdot T_n} \cdot \frac{1 + p \cdot T_n}{1 + p \cdot T_O}$$

$T_n = T_O$ - kompenzacija $$F_0(p) = \frac{1}{p \cdot T^*} \qquad T^* = \frac{T_O}{K_R \cdot K_O}$$

Pol u *"nuli"* – nestabilan sistem, ali ako se zatvori povratna veza...



$$F_w(p) = \frac{1}{1 + p \cdot T^*}$$



$$T^* = \frac{T_O}{K_R \cdot K_O}$$

T_O i K_O – fiksirane vrednosti

K_R – može se menjati i na taj način se može podesiti odziv

Kompenzacija sa PID

Za slučajeve sa: $$F_O(p) = \frac{K_1}{1 + p \cdot T_1} \cdot \frac{K_2}{1 + p \cdot T_2} \qquad T_1 >> T_2$$

Regulator: $$F_R(p) = K_R \cdot \frac{(1 + p \cdot T_n) \cdot (1 + p \cdot T_d)}{p \cdot T_n \cdot (1 + p \cdot T_g)} \qquad T_n >> T_d >> T_g$$

Kompenzacija:

$$T_n = T_1 \qquad T_d = T_2 \qquad F_0(p) = \frac{K_R \cdot K_1 \cdot K_2}{p \cdot T_n \cdot \left(1 + p \cdot T_g\right)}$$

$$F_w(p) = \frac{K_R \cdot K_1 \cdot K_2}{p^2 \cdot T_n \cdot T_g + p \cdot T_n + K_R \cdot K_1 \cdot K_2}$$

$$F_w(p) \approx \frac{1}{1 + p \cdot T^*} \qquad T^* = \frac{T_n}{K_R \cdot K_1 \cdot K_2}$$

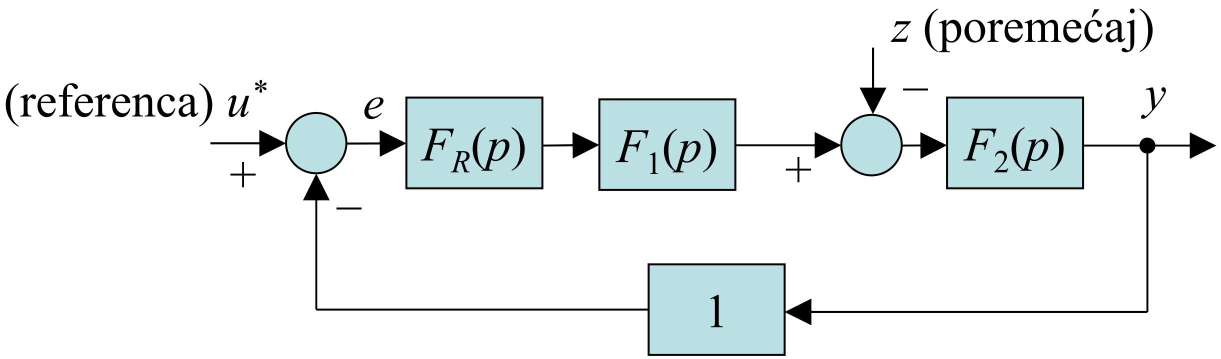
Optimizacija parametara regulatora

- Postupak optimizacije ne određuje sve parametre regulatora egzaktno.
- Većina metoda ostavlja određeni stepen slobode kod određivanja vrednosti parametara.
- Optimizacija se vrši po različitim kriterijumima.

- Kriterijum **optimizacije modula** funkcije prenosa sistema u frekventnom domenu.

Optimizacija parametara regulatora

Pođimo od opšteg blok dijagrama sistema kao kod pogona sa povratnom vezom:

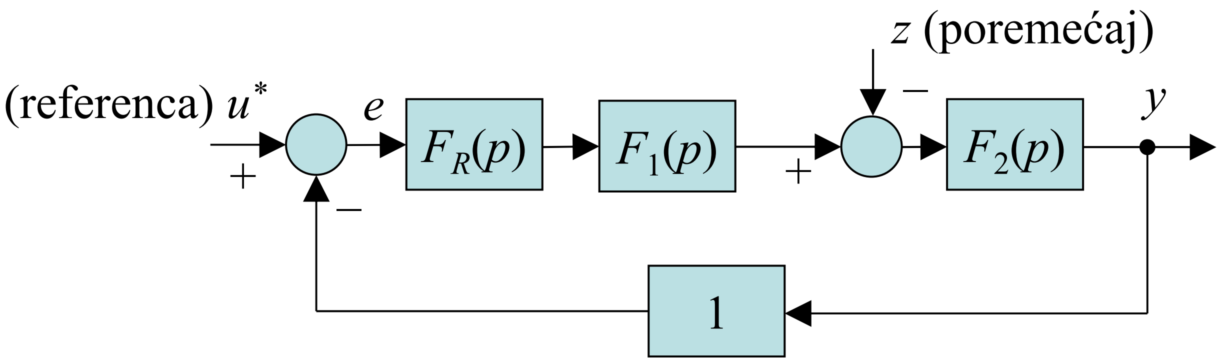


$$F_R(p) = \frac{Z_R(p)}{N_R(p)} \qquad F_1(p) = \frac{Z_1(p)}{N_1(p)} \qquad F_2(p) = \frac{Z_2(p)}{N_2(p)}$$

Funkcija prenosa sistema
u otvorenoj sprezi:

$$F_0(p) = F_R(p) \cdot F_1(p) \cdot F_2(p) = \frac{Z_0(p)}{N_0(p)}$$

Optimizacija parametara regulatora



Funkcija prenosa sistema
u zatvorenoj sprezi:

$$F_w(p) = \frac{y(p)}{u^*(p)} = \frac{F_0(p)}{1 + F_0(p)} = \frac{Z_0(p)}{Z_0(p) + N_0(p)}$$

$$F_w(p) == \frac{Z_R(p) \cdot Z_1(p) \cdot Z_2(p)}{Z_R(p) \cdot Z_1(p) \cdot Z_2(p) + N_R(p) \cdot N_1(p) \cdot N_2(p)}$$

Optimizacija parametara regulatora

Prenos ovog sistema je jednak “1” u stacionarnom stanju.

$$\frac{du^*}{dt} = 0 \;\; i \;\; \frac{dz}{dt} = 0$$

Kada se u^* menja $(du^*/dt \neq 0)$, prenos nije **1.**

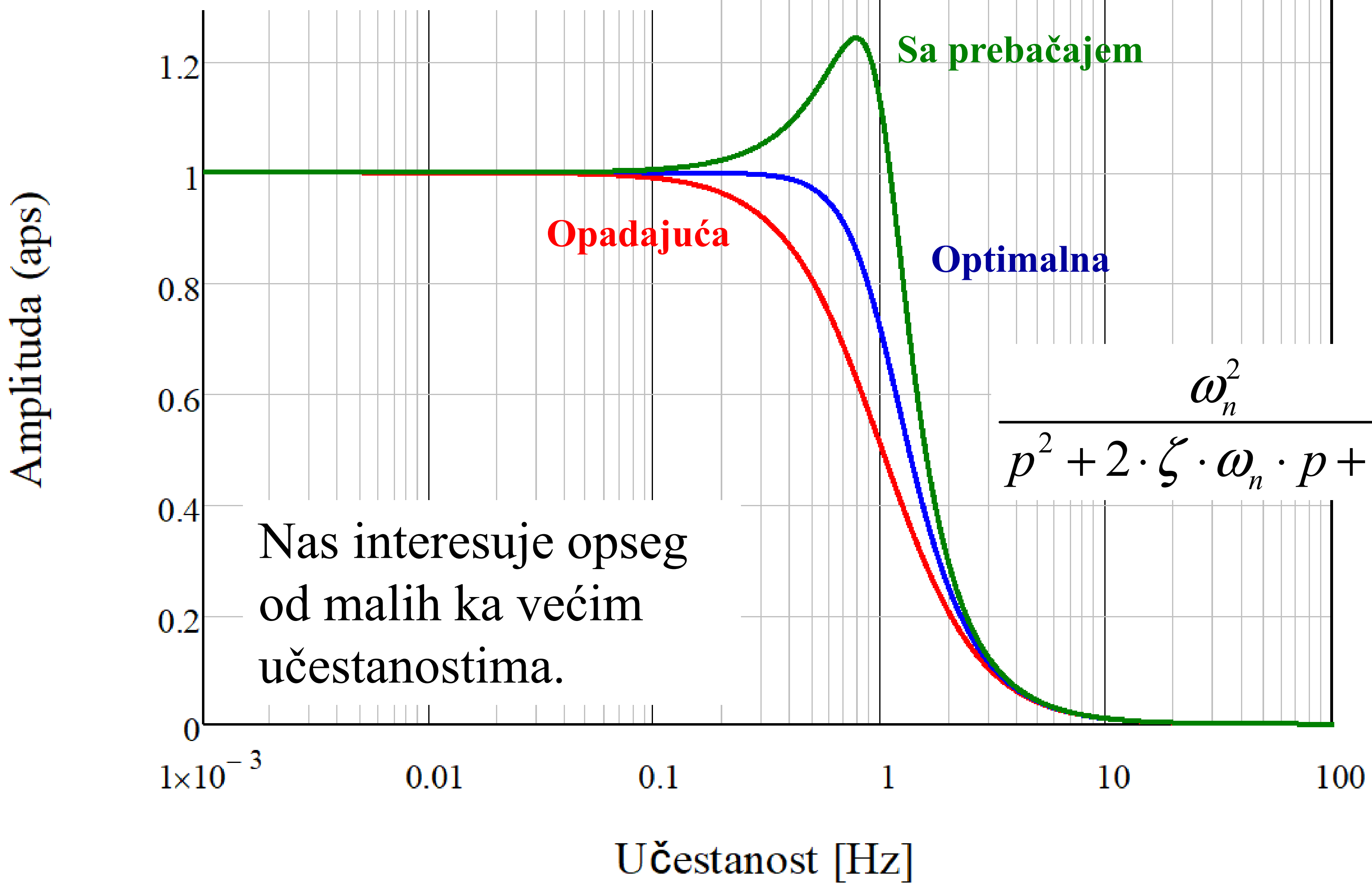
Ako posmatramo funkciju $F_w(j\omega)$ možemo reći da je sistem dobar ako je izlaz jednak, ili približno jednak ulazu u “određenom opsegu” učestanosti, tj.:

$$|F_w(j\omega)| = 1$$

Šta je to “određeni opseg”?

Optimizacija parametara regulatora

Frekventna karakteristika:

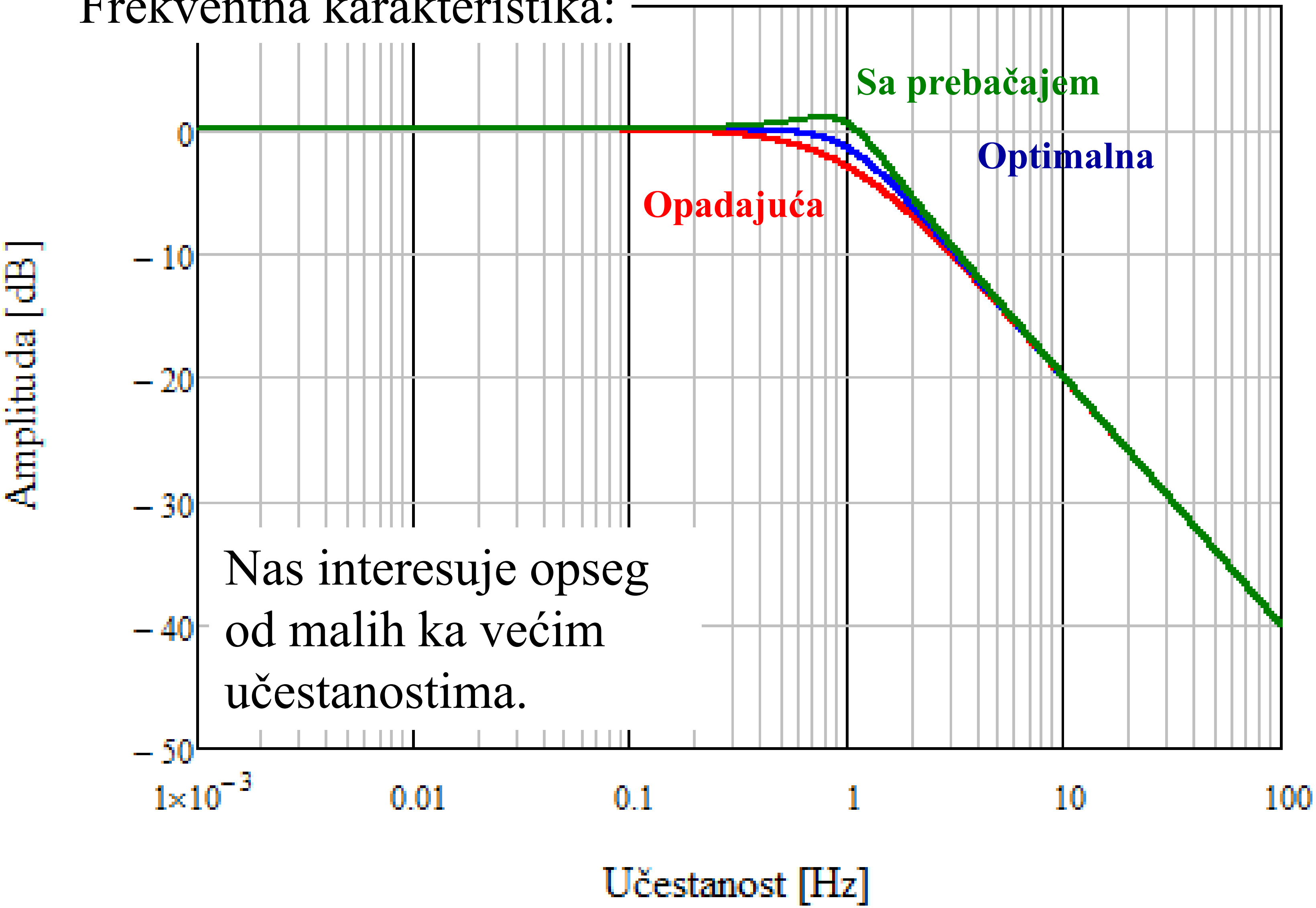


$$\frac{\omega_n^2}{p^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot p + \omega_n^2}$$

Nas interesuje opseg od malih ka većim učestanostima.

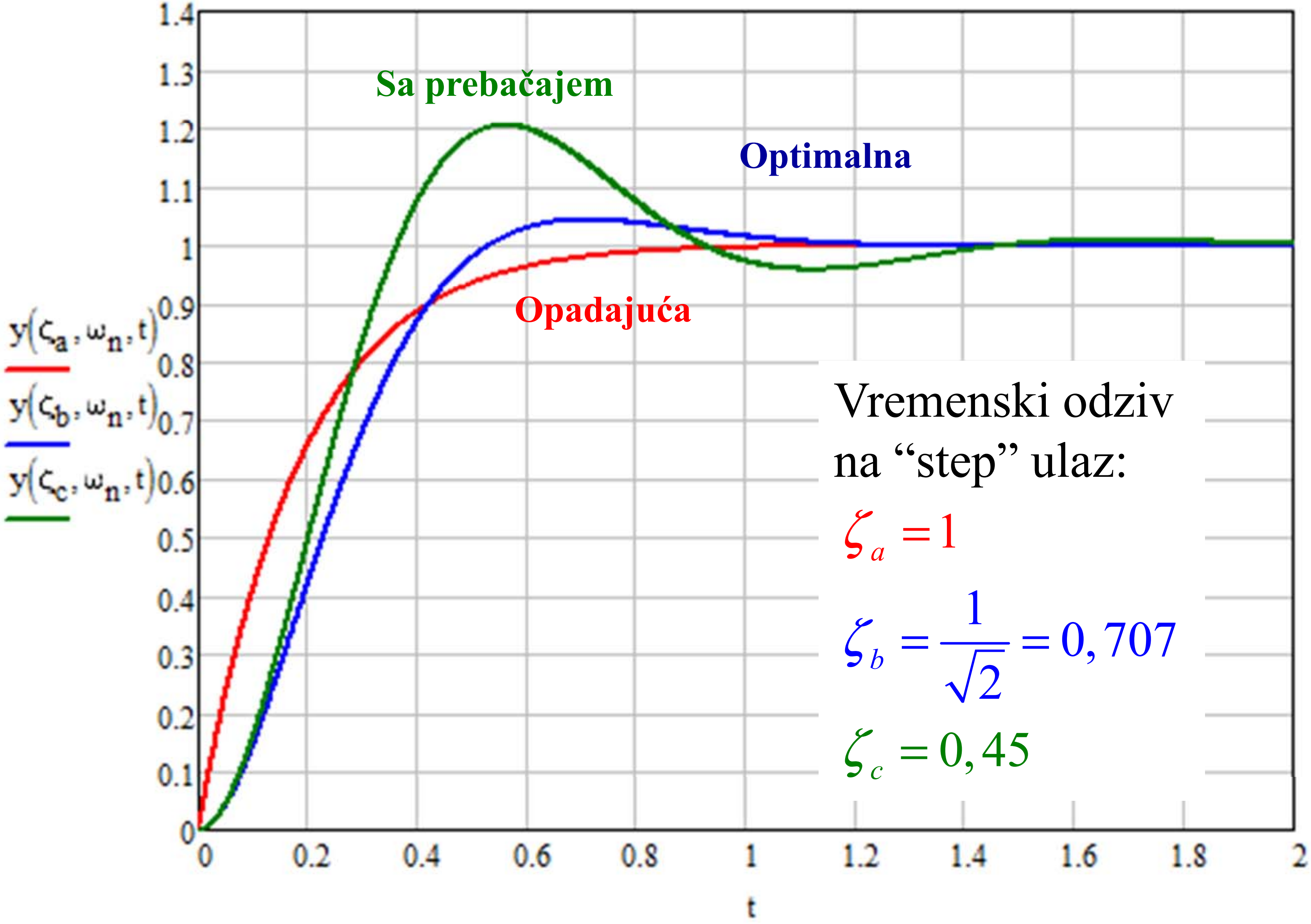
Optimizacija parametara regulatora

Frekventna karakteristika:



Nas interesuje opseg od malih ka većim učestanostima.

Optimizacija parametara regulatora



Optimizacija parametara regulatora

Posmatrajmo dva karakteristična oblika funkcija prenosa
u frekventnom domenu:

$$F_w(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{u^*(j\omega)} = \frac{b_0}{a_0 + j\omega \cdot a_1 + (j\omega)^2 \cdot a_2}$$

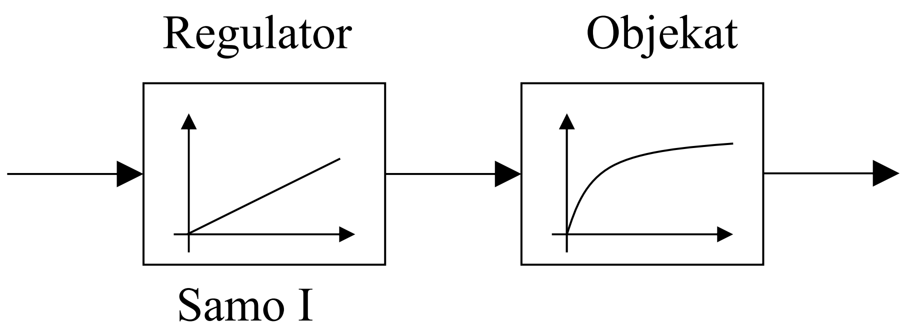
$$F_w(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{u^*(j\omega)} = \frac{b_0 + j\omega \cdot b_1}{a_0 + j\omega \cdot a_1 + (j\omega)^2 \cdot a_2 + (j\omega)^3 \cdot a_3}$$

Optimizacija parametara regulatora

U prvom slučaju $$F_w(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{u^*(j\omega)} = \frac{b_0}{a_0 + j\omega \cdot a_1 + (j\omega)^2 \cdot a_2}$$

Primer

$F_0(p)$



Nema integracionog člana u objektu

pa je: $$N_0(p) = p \cdot a_1 + p^2 \cdot a_2 \;\Rightarrow\; a_0 = b_0$$

Primer:

$$F_0(p) = \frac{1}{p \cdot T_i} \cdot \frac{K_O}{1 + p \cdot T_O} \qquad Z_0(p) = K_O \qquad N_0(p) = p \cdot T_i \cdot (1 + p \cdot T_O) = p \cdot \underbrace{T_i}_{a_1} + p^2 \cdot \underbrace{T_i \cdot T_O}_{a_2}$$

$$F_w(p) = \frac{Z_0(p)}{Z_0(p) + N_0(p)} = \frac{K_O}{K_O + p \cdot T_i + p^2 \cdot T_O \cdot T_i}$$

Optimizacija parametara regulatora

U prvom slučaju

$$\left|F_w(j\omega)\right| = \sqrt{\frac{a_0^2}{a_0^2 + \omega^2 \cdot (a_1^2 - 2a_0 a_2) + \omega^4 \cdot a_2^2}}$$

Ovo će biti ≈1 za male učestanosti ako je:

$$a_1^2 - 2a_0 a_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_1^2 = 2a_0 a_2}$$

Posle čega se dobija:

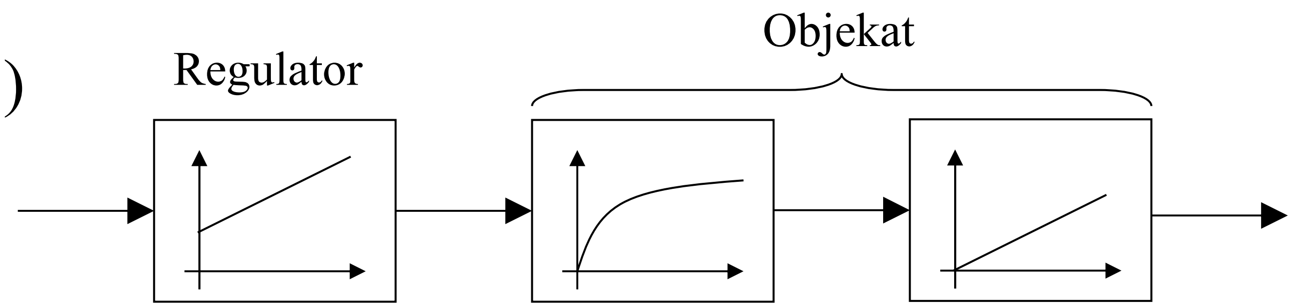
$$\left|F_w(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^4 \cdot (a_2 / a_0)^2}}$$

Optimizacija parametara regulatora

U drugom slučaju $$F_w(j\omega) = \frac{b_0 + j\omega \cdot b_1}{a_0 + j\omega \cdot a_1 + (j\omega)^2 \cdot a_2 + (j\omega)^3 \cdot a_3}$$

Primer

$F_0(p)$



pa je: $N_0(p) = p^2 \cdot a_2 + p^3 \cdot a_3 \Rightarrow \quad a_0 = b_0;\ a_1 = b_1;$

Optimizacija parametara regulatora

U drugom slučaju:

$$|F_w(j\omega)| = \sqrt{\frac{a_0^2 + \omega^2 a_1^2}{a_0^2 + \omega^2 \cdot (a_1^2 - 2a_0a_2) + \omega^4 \cdot (a_2^2 - 2a_1a_3) + \omega^6 \cdot a_3^2}}$$

Ovo će biti ≈1 za male učestanosti ako je:

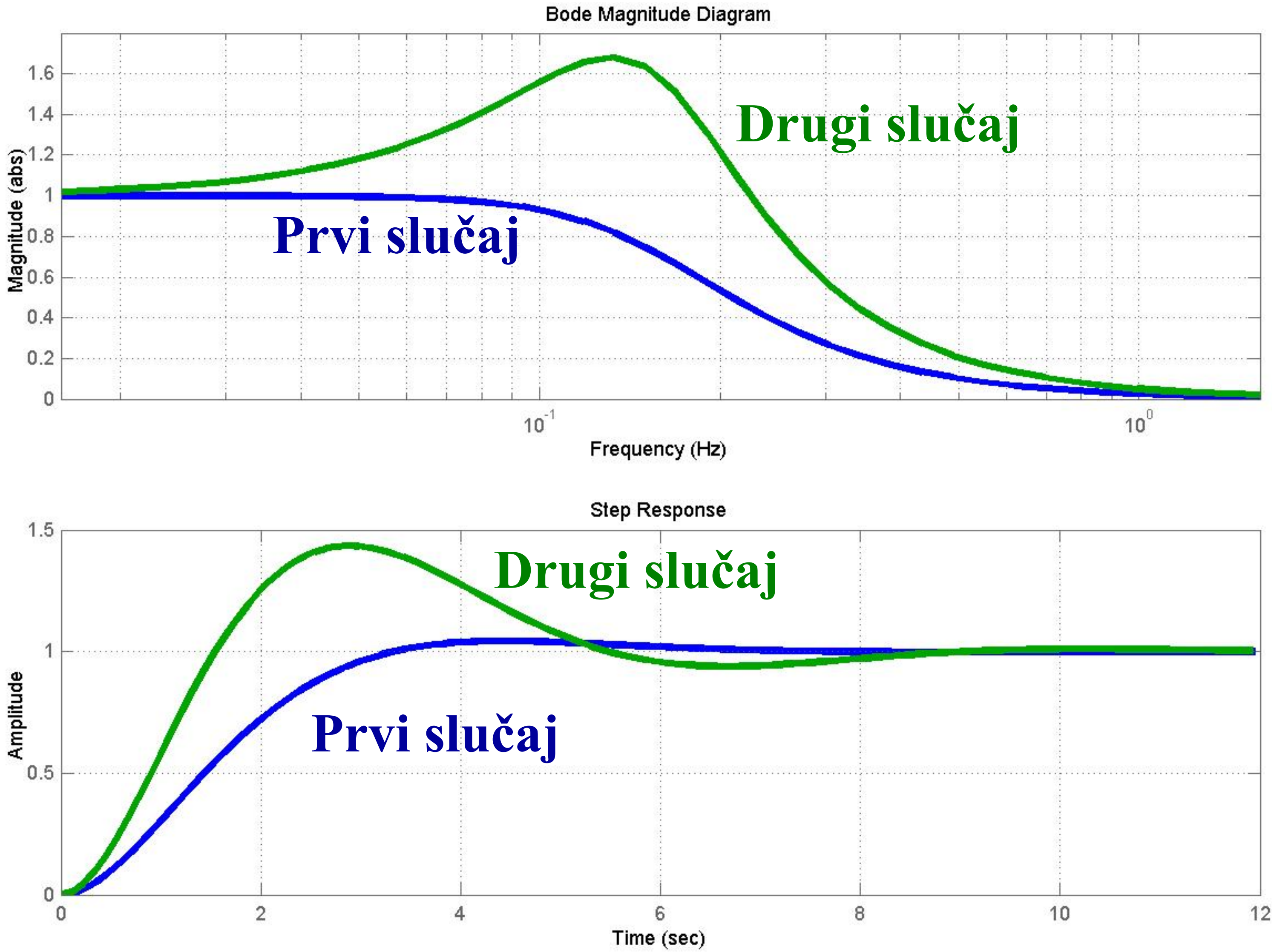
$$a_1^2 - 2a_0a_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_1^2 = 2a_0a_2}$$

$$a_2^2 - 2a_1a_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_2^2 = 2a_1a_3}$$

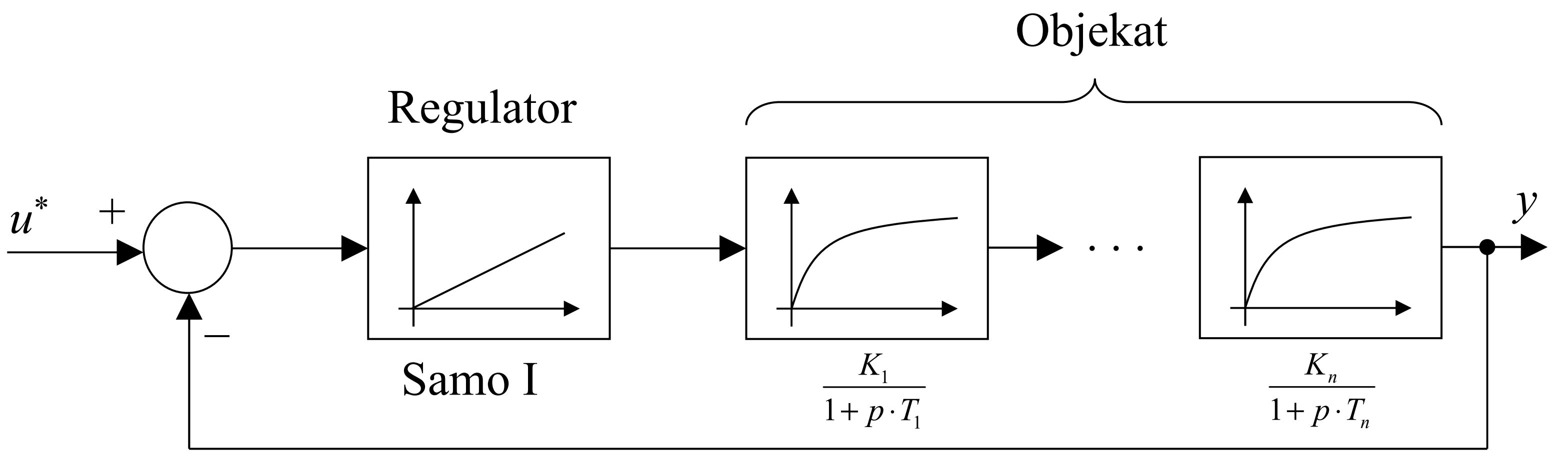
Posle čega se dobija:

$$|F_w(j\omega)| = \sqrt{\frac{1 + \omega^2 \cdot (a_1/a_0)^2}{1 + \omega^6 \cdot (a_3/a_0)^2}}$$

Optimizacija parametara regulatora



Za funkciju prenosa drugog reda



Ako nema integratora u objektu, i $T_1 \approx T_2 \approx \ldots \approx T_n$

$$T_e = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$$

$$K_O = K_1 \cdot K_2 \cdot \ldots \cdot K_n$$

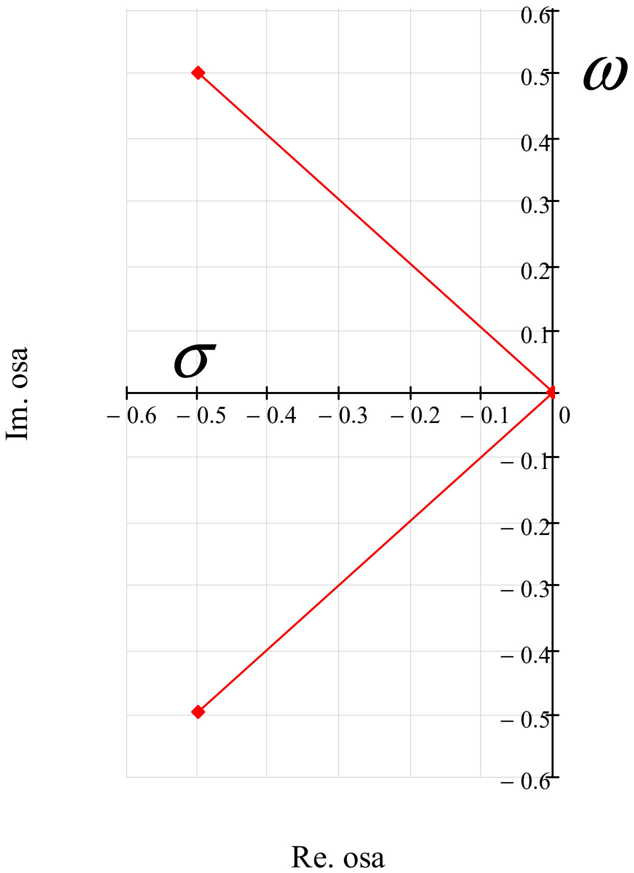
$$F_0(p) = \frac{1}{p \cdot T_I} \cdot \frac{K_O}{1 + p \cdot T_e}$$

$$F_w(p) = \frac{y(p)}{u^*(p)} = \frac{K_O}{K_O + p \cdot T_I + p^2 \cdot T_I \cdot T_e}$$

$$a_0 = K_O \quad a_1 = T_I \quad a_2 = T_I \cdot T_e \qquad a_1^2 = 2 \cdot a_0 \cdot a_2 \qquad T_I = 2 \cdot K_O \cdot T_e$$

$$F_w(p) = \frac{y(p)}{u^*(p)} = \frac{1}{1 + p \cdot 2 \cdot T_e + p^2 \cdot 2 \cdot T_e^2}$$

Polovi funkcije prenosa $F_w(p)$ za T_e=1:



$$p_{1,2} = -\frac{1}{2 \cdot T_e} \pm i \cdot \frac{1}{2 \cdot T_e} =$$

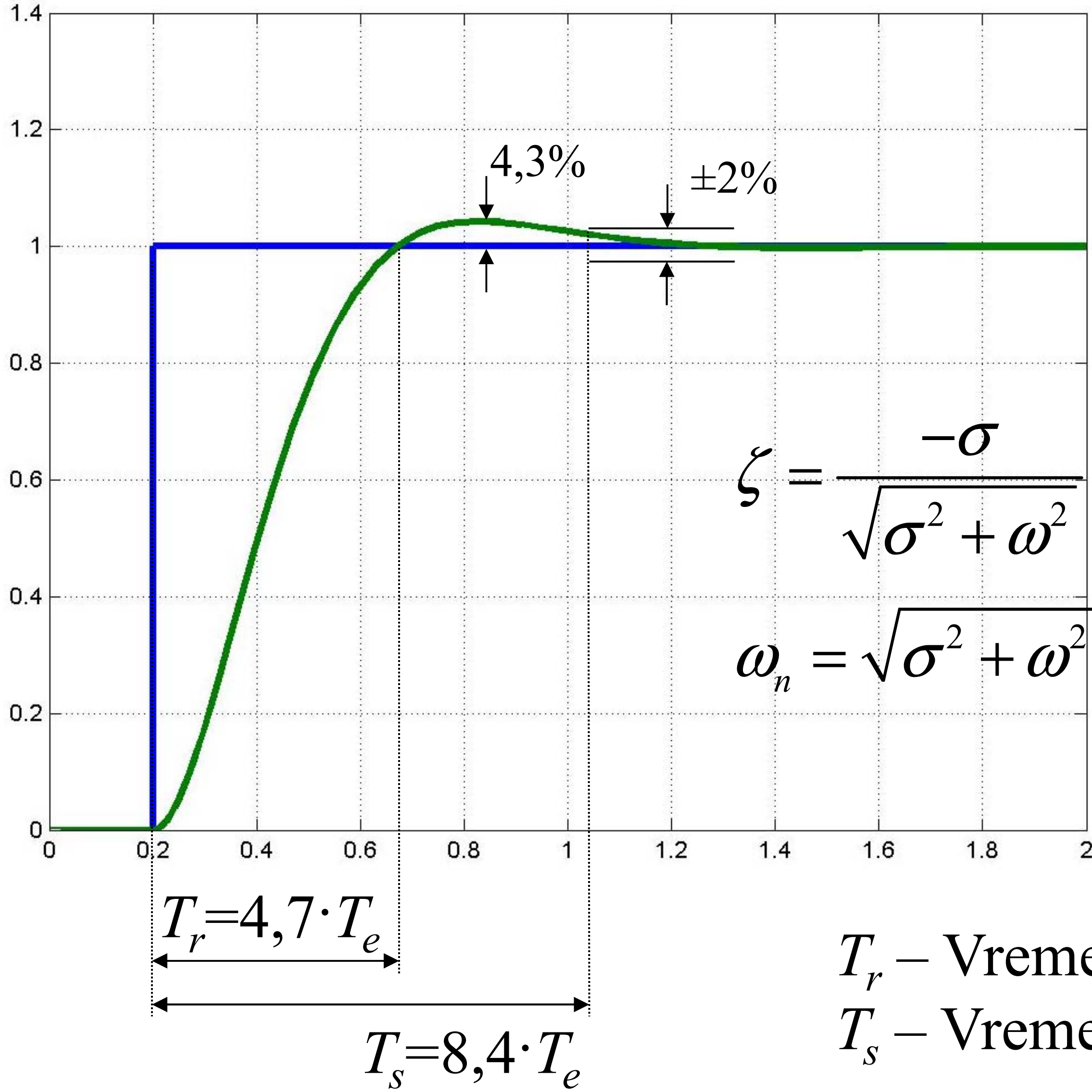
$$= \frac{1}{2 \cdot T_e} \cdot (-1 \pm i) = \sigma \pm i \cdot \omega$$

Ako je $u^*(t)$ step funkcija $h(t)$, onda je:

$$y(t) = £^{-1}\left\{u^*(p) \cdot F_w(p)\right\} =$$

$$= 1 - e^{-\frac{t}{2 \cdot T_e}} \left[\cos\left(\frac{t}{2 \cdot T_e}\right) + \sin\left(\frac{t}{2 \cdot T_e}\right) \right]$$

Odziv u vremenskom domenu (T_e=0,1s)



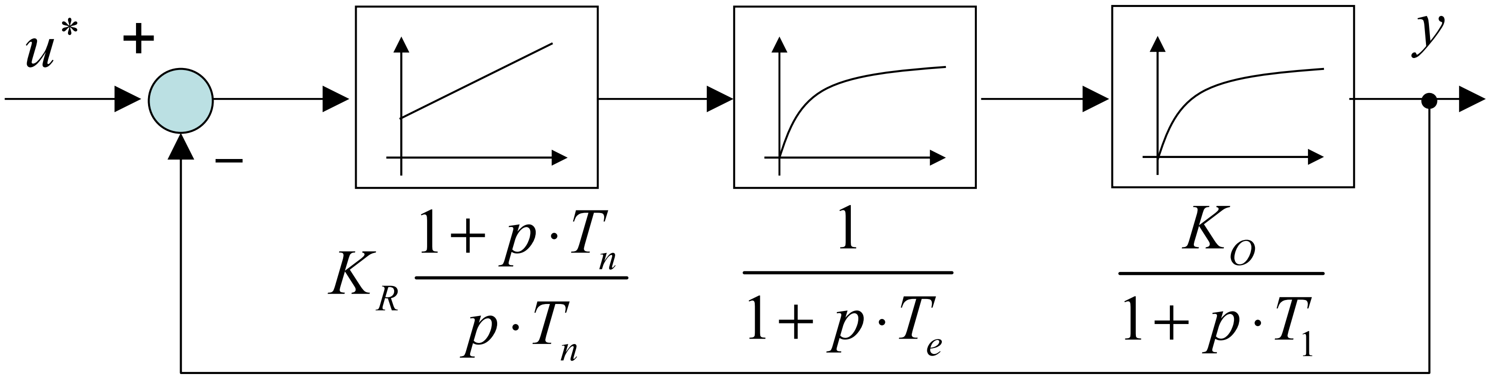
$$\zeta = \frac{-\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{T_e}$$

T_r – Vreme reagovanja

T_s – Vreme smirenja

Ako je jedna vremenska konstanta “velika”



$$F_0(p) = K_R \cdot \frac{1+p\cdot T_n}{p\cdot T_n}\cdot\frac{1}{1+p\cdot T_e}\cdot\frac{K_O}{1+p\cdot T_1} \qquad T_1 \gg T_e$$

Da bi se kompenzovala velika vremenska konstanta $\rightarrow T_n = T_1$

$$F_0(p) = \frac{K_R\cdot K_O}{p\cdot T_1\cdot(1+p\cdot T_e)} \qquad F_w(p) = \frac{K_R\cdot K_O}{K_R\cdot K_O + p\cdot T_1 + p^2\cdot T_1\cdot T_e}$$

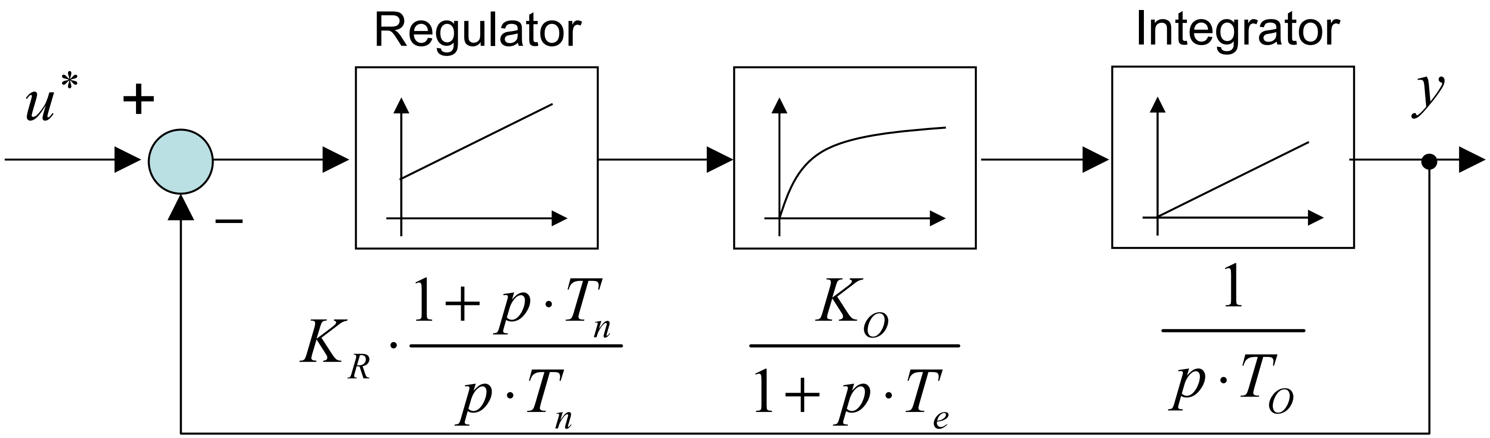
$$a_0 = K_R \cdot K_O; \qquad a_1 = T_1; \qquad a_2 = T_1 \cdot T_e$$

$$K_R \cdot K_O = \frac{T_1}{2 \cdot T_e} \longrightarrow K_R = \frac{T_1}{2 \cdot K_O \cdot T_e}$$

$$F_w(p)_{opt.} = \frac{y(p)}{u^*(p)} = \frac{1}{1 + p \cdot 2 \cdot T_e + p^2 \cdot 2 \cdot T_e^2}$$

- Ako su obe „vremenske konstante” velike, primenjuje se PID.
- Ako je jedna vremenska konstanta 20 puta veća od druge, može se primeniti P regulator, ali tada postoji problem statičke greške!

Modulni optimum za funkciju prenosa trećeg reda



Ako primenimo kompenzaciju: $T_n = T_e$

$$F_0(p) = \frac{K_R}{p\cdot T_n}\cdot\frac{K_O}{p\cdot T_O} = \frac{1}{p^2\cdot\frac{T_n}{K_R}\cdot\frac{T_O}{K_O}}$$

$$F_w(p) = \frac{y(p)}{u^*(p)} = \frac{1}{1 + p^2 \cdot \frac{T_n}{K_R} \cdot \frac{T_O}{K_O}}$$

Ako je $u^*(t)=h(t)$, step funkcija :

$$y(t) = 1 - \cos(\omega_n \cdot t); \qquad \omega_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{T_n}{K_R} \cdot \frac{T_O}{K_O}}}$$

Neprigušene oscilacije.

Zaključak: Ne može se primeniti kompenzacija!

Koristimo se opet principom $\left|F_w(j\omega)\right| \approx 1$

$$F_0(p) = K_R \cdot \frac{1 + p \cdot T_n}{p \cdot T_n} \cdot \frac{K_O}{1 + p \cdot T_e} \cdot \frac{1}{p \cdot T_O}$$

$$F_w(p) = \frac{K_R \cdot K_O (1 + p \cdot T_n)}{\underbrace{K_R \cdot K_O}_{a_0} + p \cdot \underbrace{K_R \cdot K_O \cdot T_n}_{a_1} + p^2 \cdot \underbrace{T_n \cdot T_O}_{a_2} + p^3 \cdot \underbrace{T_n \cdot T_O \cdot T_e}_{a_3}}$$

$$a_0 = K_R K_O; \quad a_1 = K_R \cdot K_O \cdot T_n; \quad a_2 = T_n \cdot T_O; \quad a_3 = T_n \cdot T_O \cdot T_e$$

Optimum ćemo ostvariti ukoliko je: $a_1^2 = 2 \cdot a_0 \cdot a_2; \quad a_2^2 = 2 \cdot a_1 \cdot a_3$

$$\boxed{T_n = 4 \cdot T_e}$$

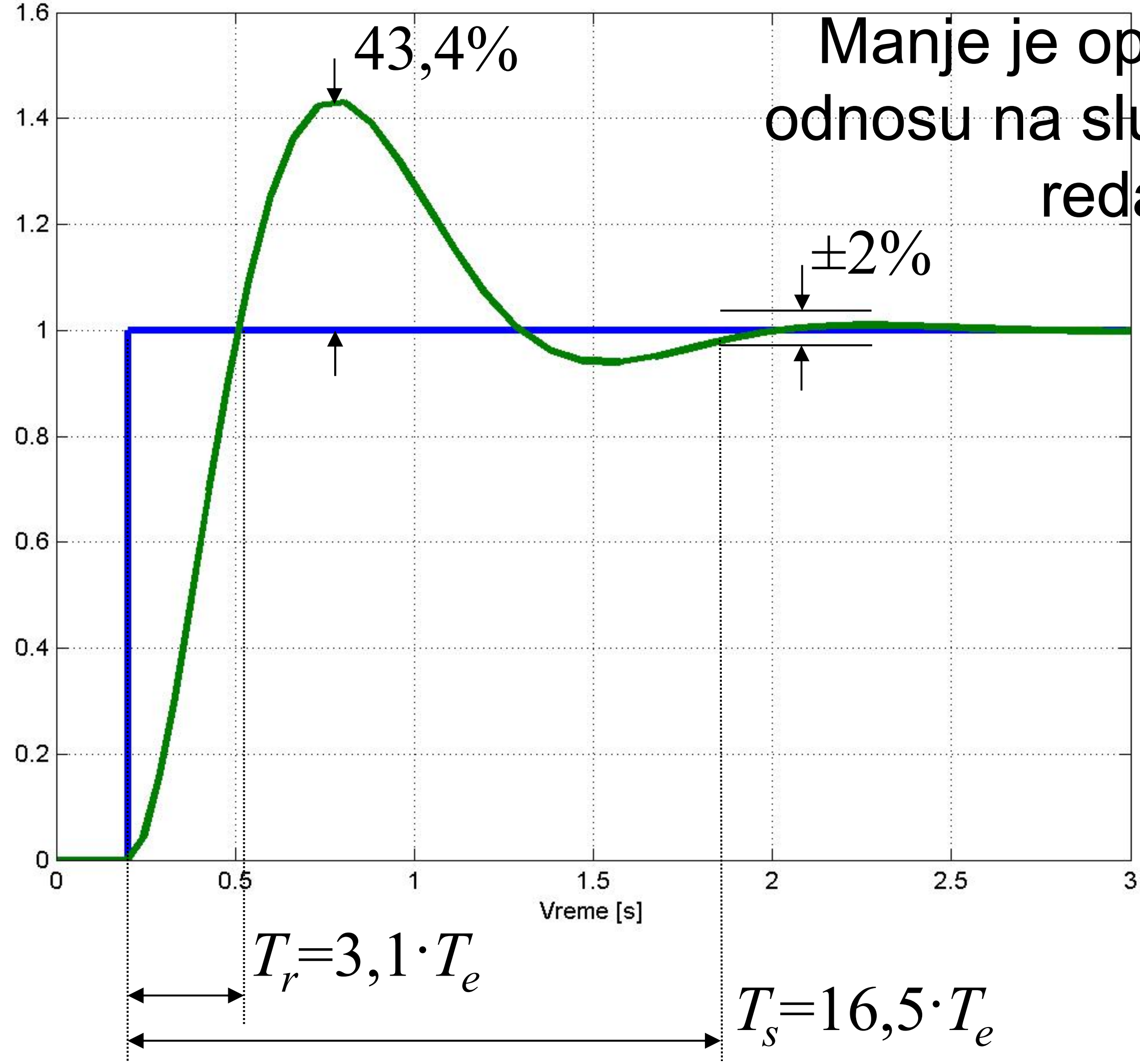
$$\boxed{K_R = \frac{T_O}{2} \cdot \frac{1}{K_O \cdot T_e}}$$

$$F_w(p)_{opt} = \frac{y(p)}{u^*(p)} = \frac{1 + p \cdot 4 \cdot T_e}{1 + p \cdot 4 \cdot T_e + p^2 \cdot 8 \cdot T_e^2 + p^3 \cdot 8 \cdot T_e^3}$$

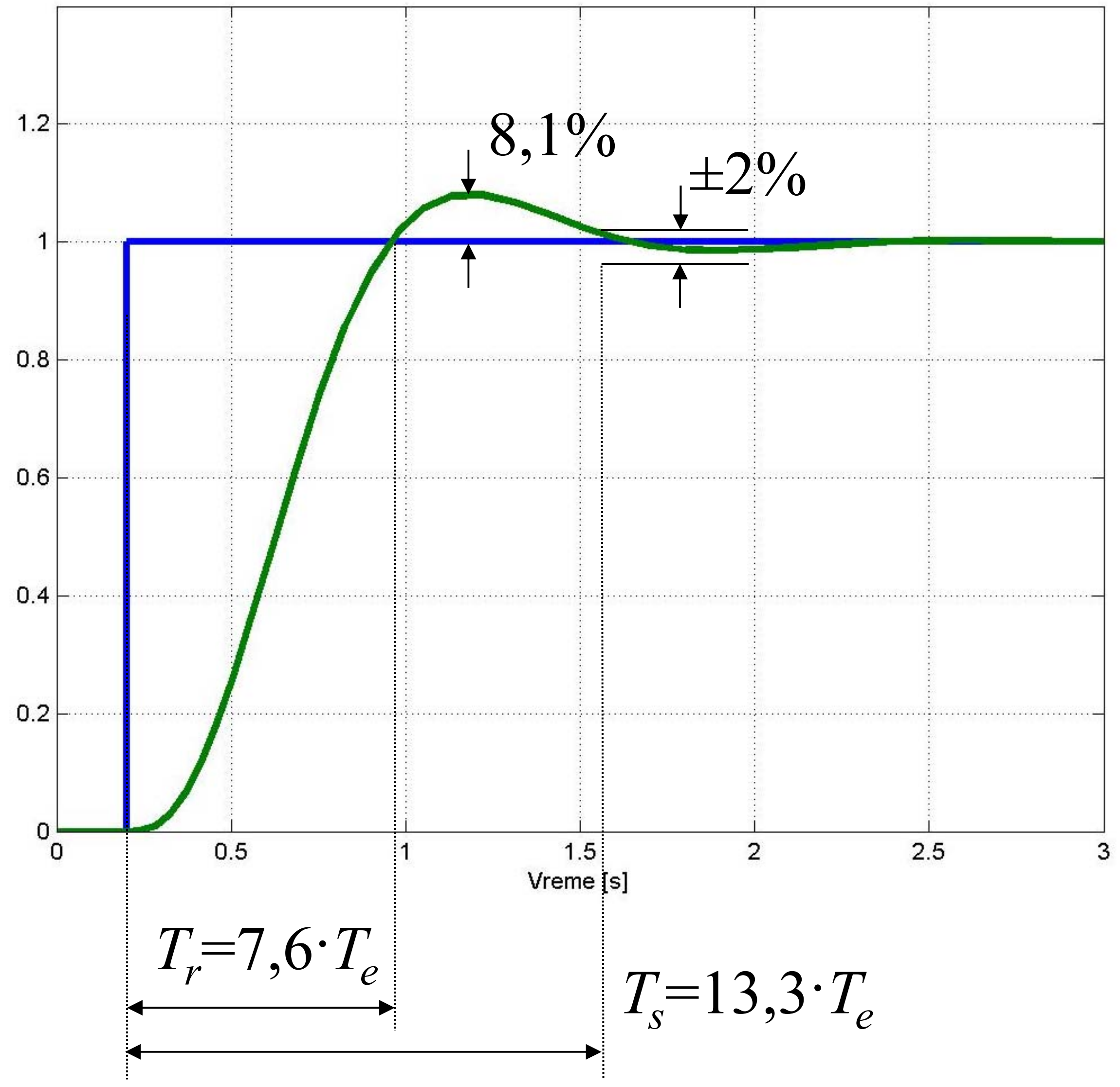
Odziv u vremenskom domenu (T_e=0,1s)

Odziv brži, premašaj!

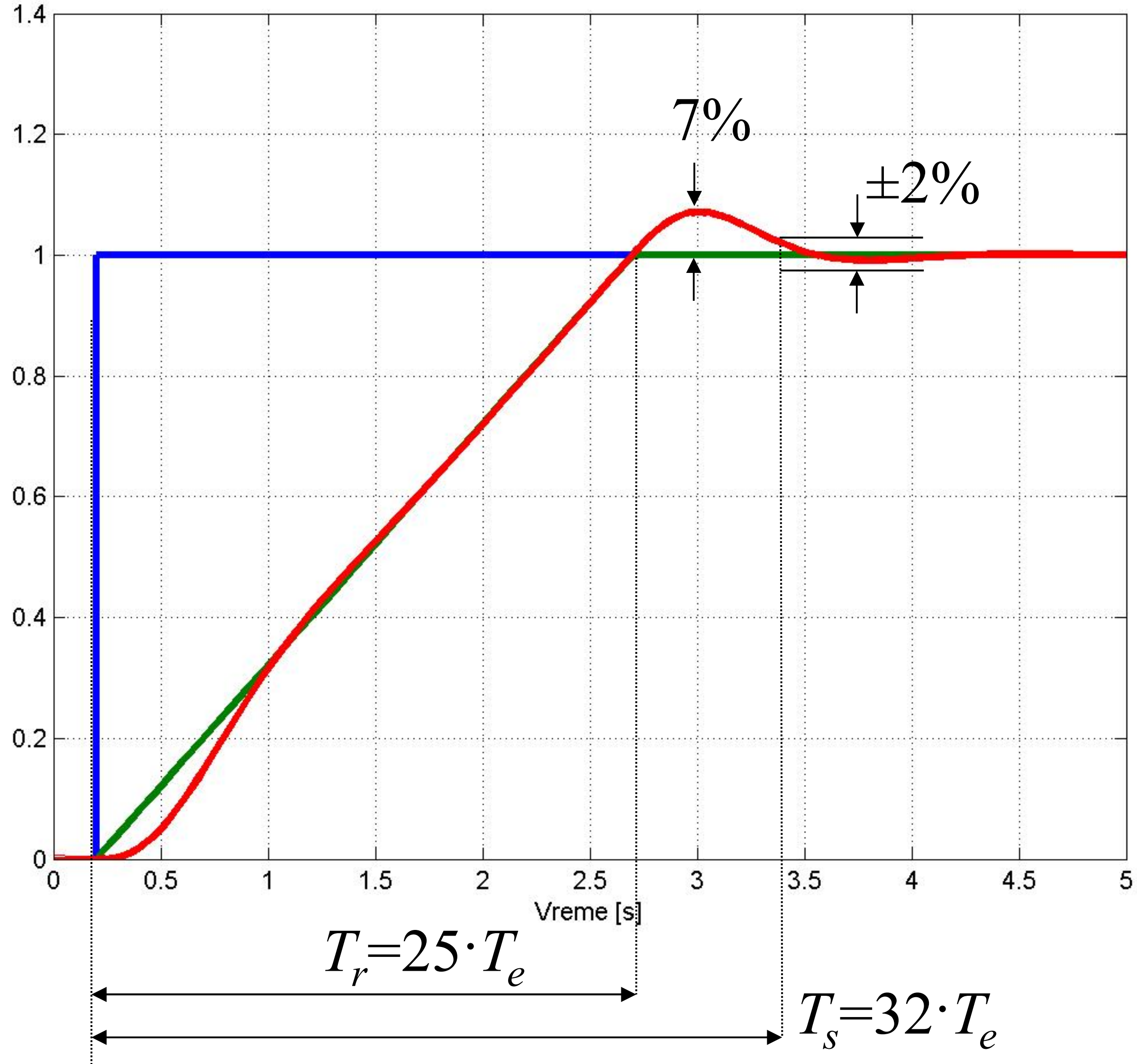
Manje je optimalan u odnosu na slučaj drugog reda.



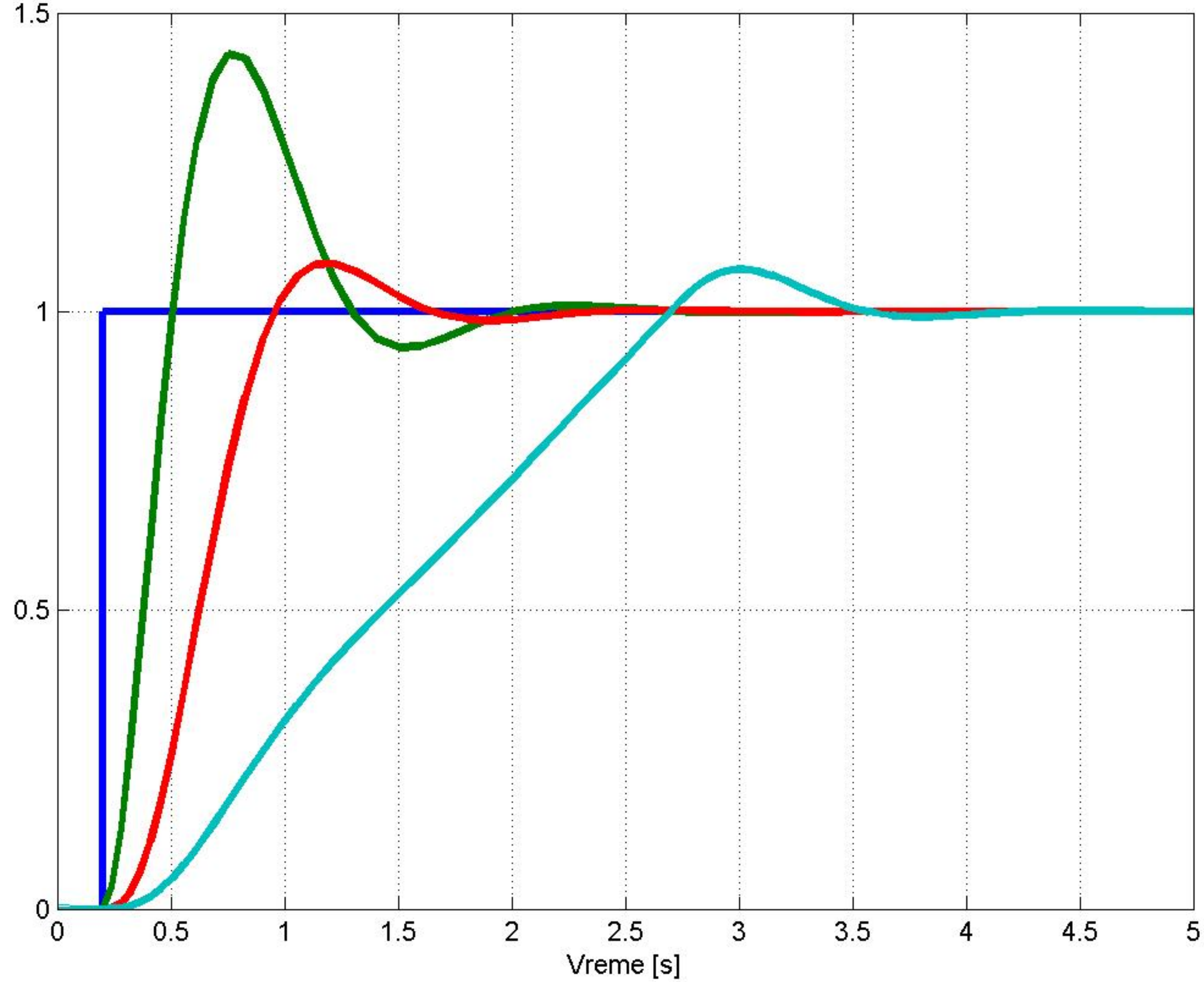
Ako se na red stavi filter sa $\dfrac{1}{1+p\cdot 4\cdot T_e}$



Ako se na red stavi soft-start

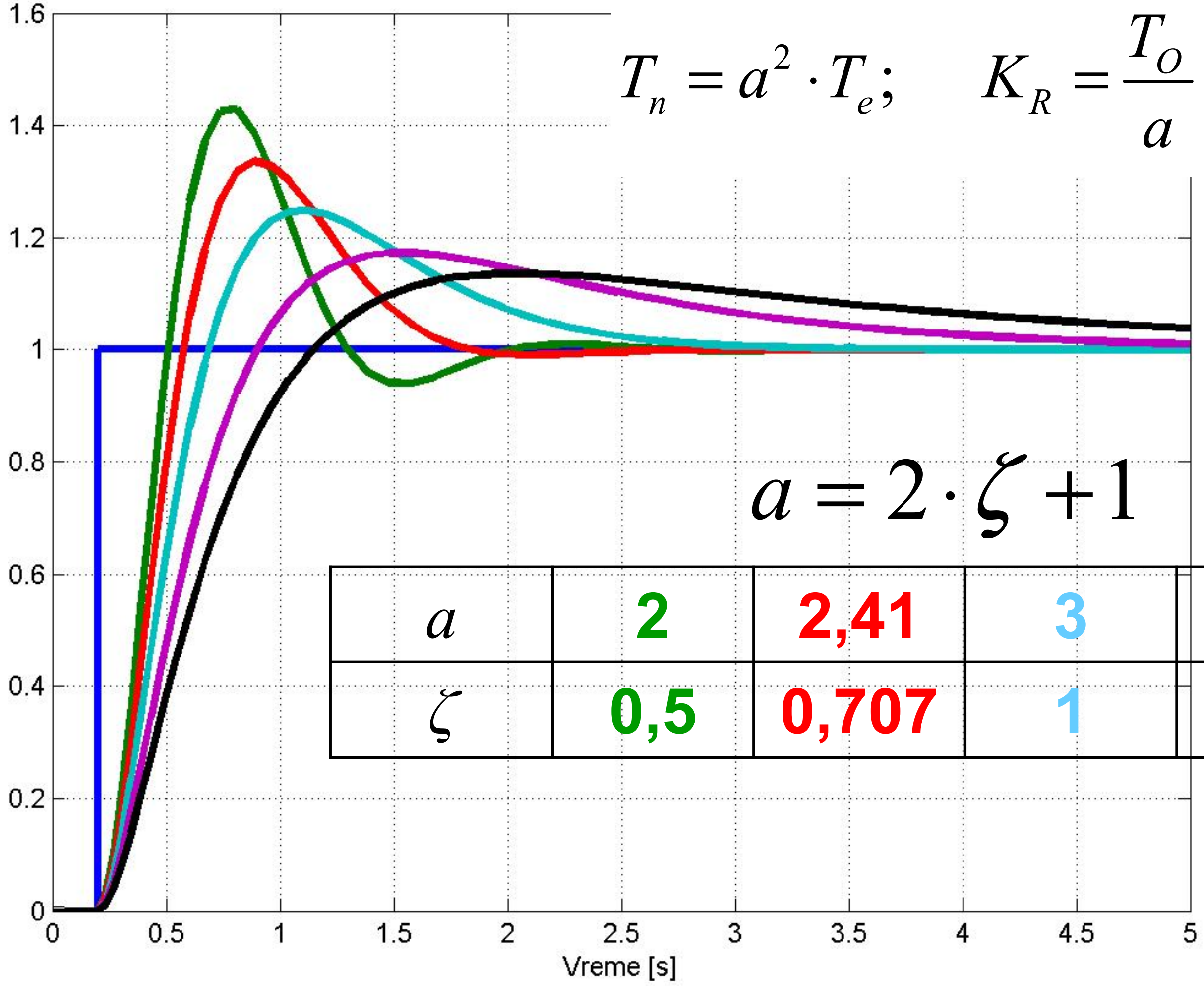


Uporedni prikaz odziva:
sa filterom sa soft-startom i **bez filtera**



Modifikacija parametara

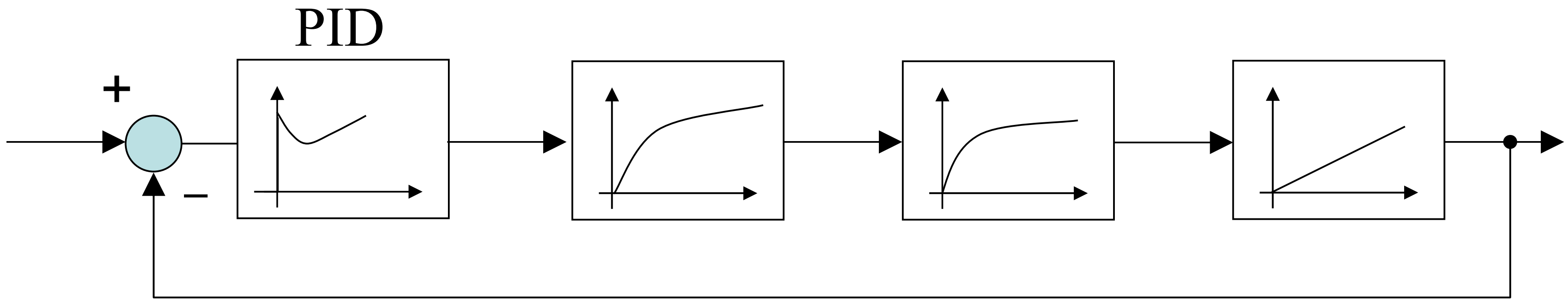
$$T_n = a^2 \cdot T_e; \qquad K_R = \frac{T_O}{a} \cdot \frac{1}{K_O \cdot T_e}$$



$$a = 2 \cdot \zeta + 1$$

a	2	2,41	3	4	5
ζ	0,5	0,707	1	1,5	2

Ako je objekat sa dve vremenske konstante i integratorom

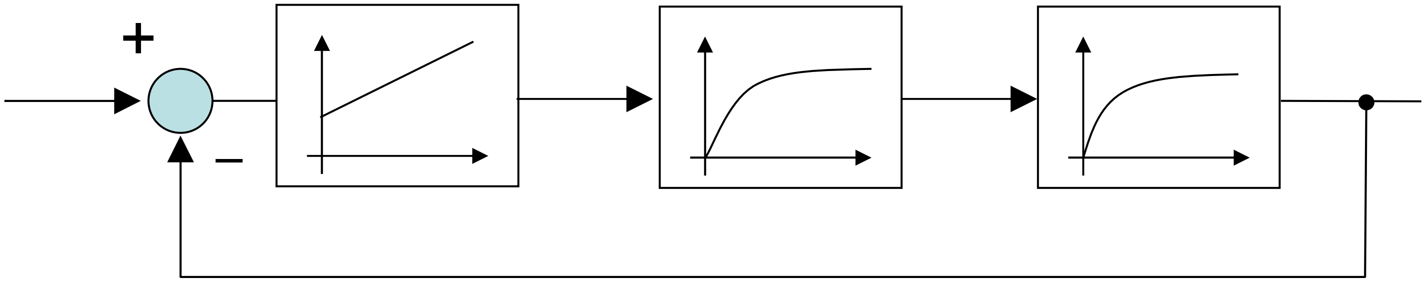


$$K_R \cdot \frac{(1+p\cdot T_n)\cdot(1+p\cdot T_d)}{p\cdot T_n} \qquad \frac{K_O}{1+p\cdot T_1} \qquad \frac{1}{1+p\cdot T_e} \qquad \frac{1}{p\cdot T_i}$$

$$T_1 \gg T_e$$

T_n=T_1 – kompenzacija najveće vremenske konstante,
posle optimizacija modula.

Ako je:

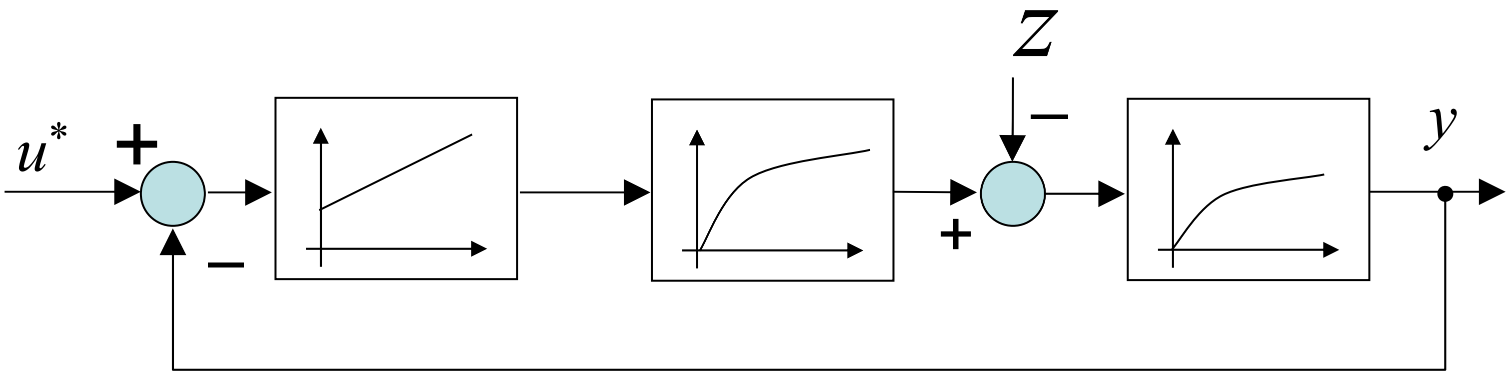


$$K_R \cdot \frac{1+p\cdot T_n}{p\cdot T_n} \qquad \frac{K_O}{1+p\cdot T_1} \qquad \frac{1}{1+p\cdot T_e}$$

$$4\cdot T_e < T_1$$

Optimizacijom se dobija: $T_n = 4\cdot T_e$ $\qquad K_R = \dfrac{T_1}{2\cdot K_O \cdot T_e}$

Odziv na poremećaj Z prvi slučaj:



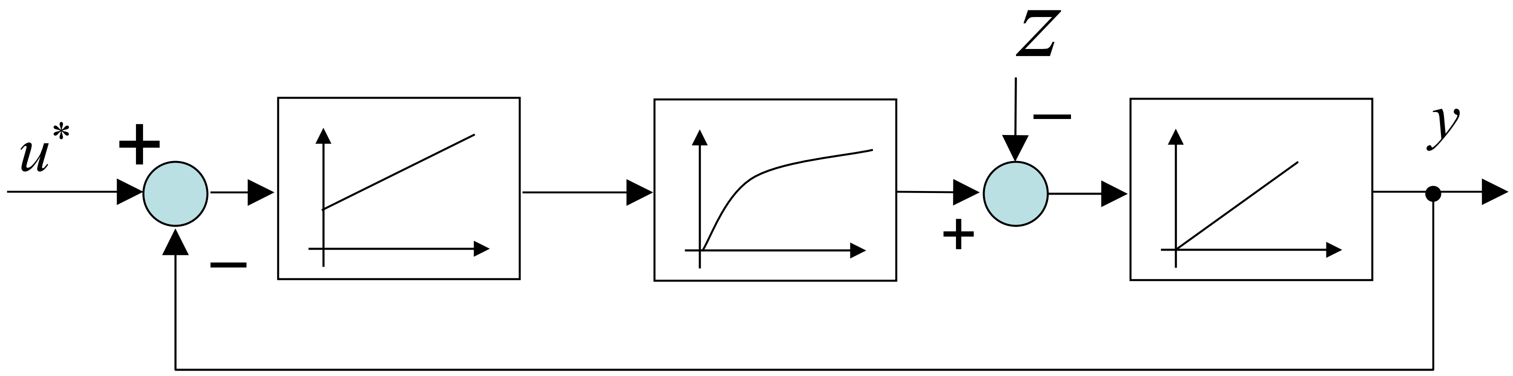
$$K_R \cdot \frac{1 + p \cdot T_n}{p \cdot T_n} \qquad \frac{1}{1 + p \cdot T_e} \qquad \frac{K_O}{1 + p \cdot T_O}$$

T_O – “velika” vremenska konstanta

T_e – “mala” vremenske konstante

$$4 \cdot T_e < T_O$$

Odziv na poremećaj Z drugi slučaj:



$$K_R \cdot \frac{1 + p \cdot T_n}{p \cdot T_n} \qquad \frac{K_O}{1 + p \cdot T_e} \qquad \frac{1}{p \cdot T_O}$$

T_O – “velika” vremenska konstanta

T_e – “mala” vremenske konstante

$$4 \cdot T_e < T_O$$

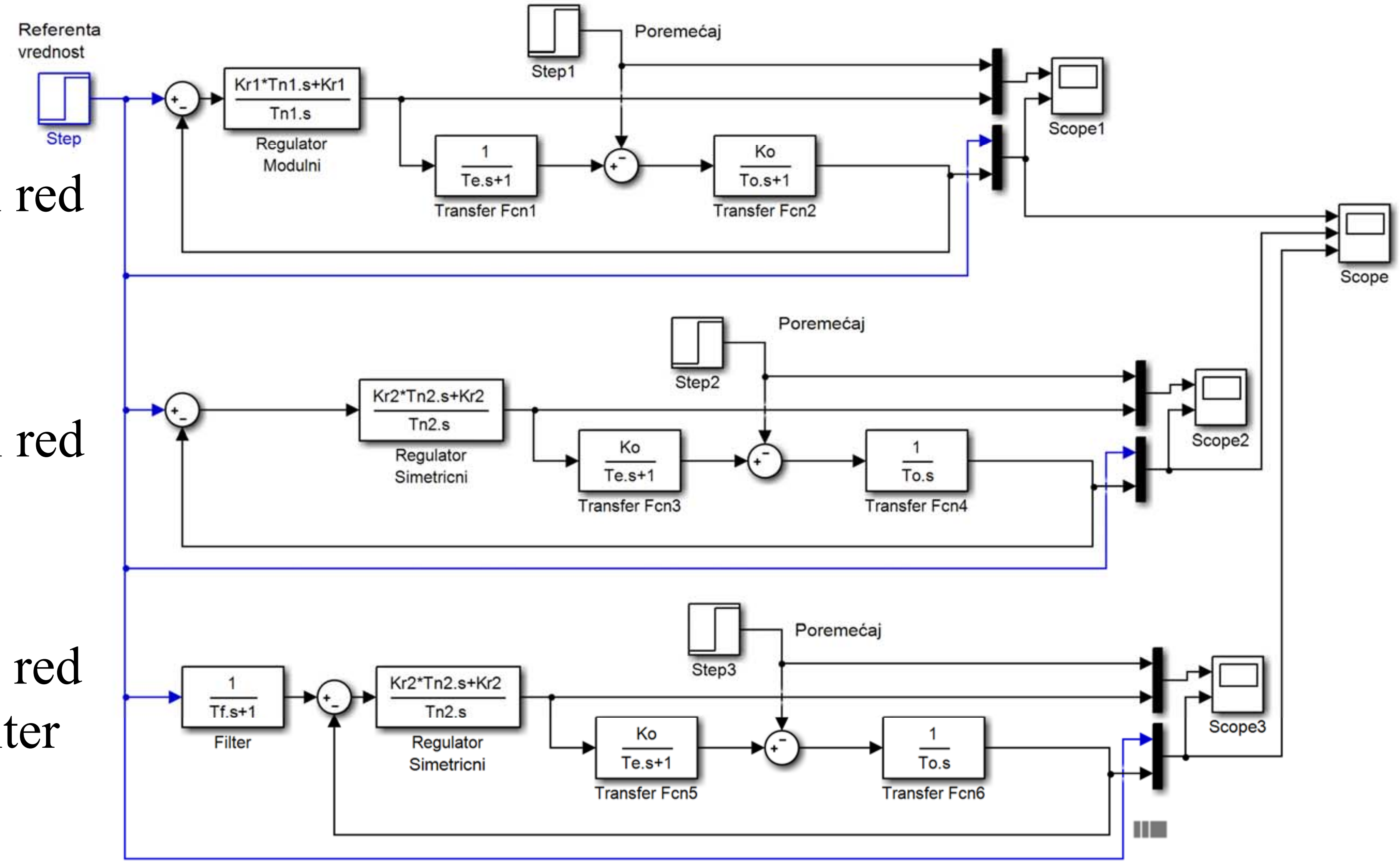
Odziv na poremećaj

$z = h(t)$

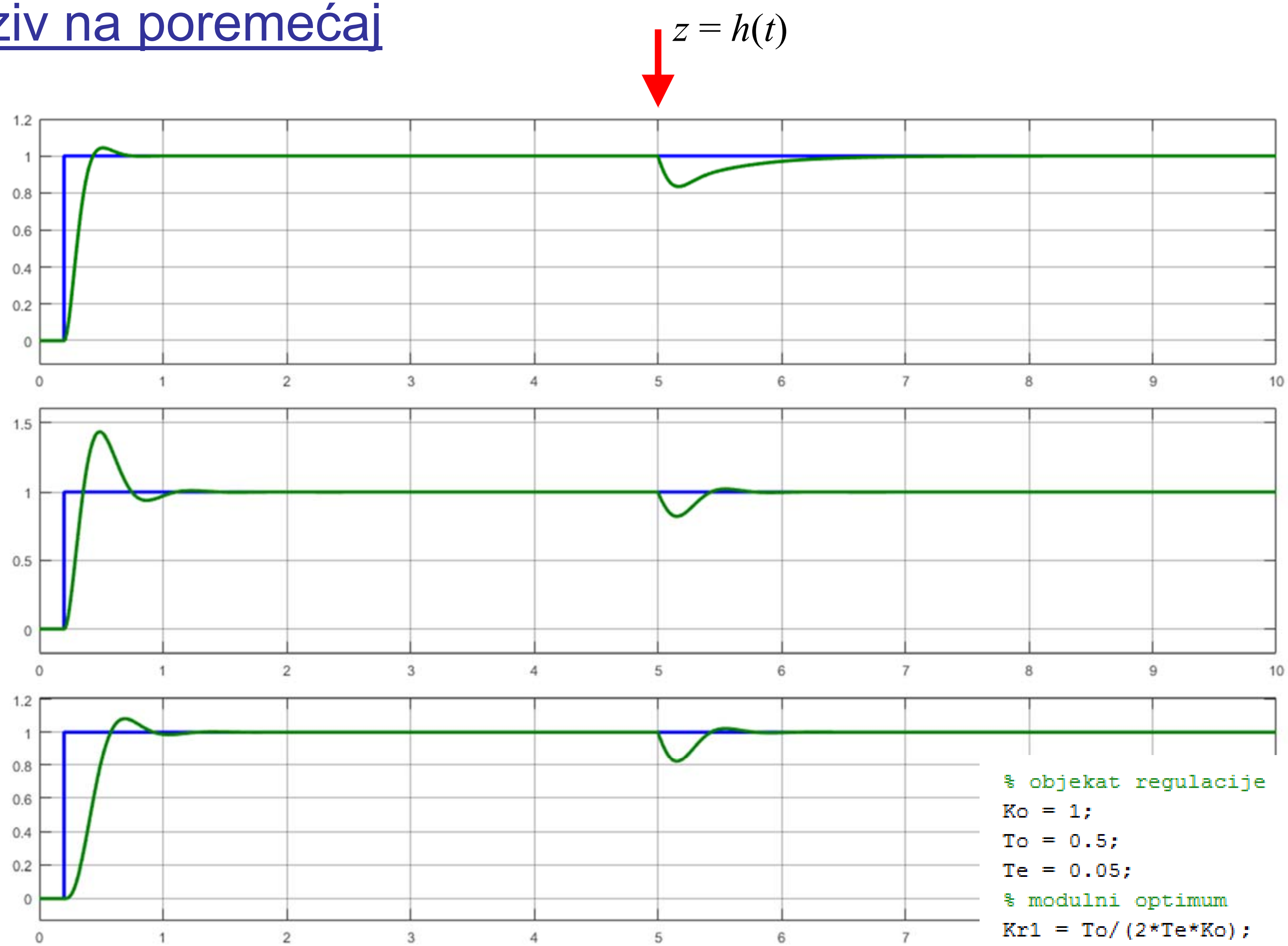
Drugi red

Treći red

Treći red + filter



Odziv na poremećaj



Drugi red

Treći red

Treći red
+ filter

```
% objekat regulacije
Ko = 1;
To = 0.5;
Te = 0.05;
% modulni optimum
Kr1 = To/(2*Te*Ko);
Tn1 = To;
% simetricni optimum
Tn2 = 4*Te;
Kr2 = To/(2*Te*Ko);
Tf = 4*Te;
```